



Dipartimento di Statistica
"Giuseppe Parenti"

Dipartimento di Statistica "G. Parenti" – Viale Morgagni 59 – 50134 Firenze - www.ds.unifi.it

Q U A D E R N I 2 0 0 6 / 0 2

Split-plot e robust design

Rossella Berni, Arianna Pallottini



Università degli Studi
di Firenze

“*SPLIT-PLOT E ROBUST DESIGN*”

ROSSELLA BERNI
ARIANNA PALLOTTINI
Dipartimento di Statistica
“G.Parenti”
E-mail: berni@ds.unifi.it

Indice

Premessa	pag.3
Capitolo 1– Il disegno sperimentale <i>Split-plot</i>	pag.5
Capitolo 2 – Il concetto di <i>Robust Design</i>	pag.16
Capitolo 3 – Il disegno <i>Split-plot</i> e il concetto di <i>Robust Design</i>	pag.25
Capitolo 4 – <i>Split-plot</i> : innovazioni metodologiche	pag.43
Conclusioni	pag.64
Bibliografia	pag.65

Premessa♦

Questo lavoro illustra il disegno sperimentale *split-plot* e cerca di porre l'attenzione allo sviluppo che questo piano sperimentale ha ottenuto negli ultimi anni in ottica di robustezza del disegno. In particolare, lo scopo iniziale, sorto con la tesi di laurea di Pallottini (2004), è quello di riunire e sintetizzare parte della letteratura esistente sull'argomento e, contemporaneamente, sviluppare e completare la definizione di robustezza del disegno introdotta con il *product-array* di Taguchi.

Il concetto di *Robust Design*, ormai ampiamente utilizzato nell'ambito dei disegni sperimentali per la progettazione della qualità, necessita infatti di una puntualizzazione che consideri in modo esauriente il ruolo e l'importanza rivestite dai fattori. Ai fini di una corretta pianificazione, è necessario che, innanzitutto, allorché siamo nella fase vera e propria di programmazione sperimentale, il ricercatore sappia con notevole attendibilità classificare i fattori secondo il loro specifico ruolo e le loro caratteristiche di misurabilità, controllabilità ed influenza. In quest'ottica, il miglioramento ulteriore può essere ottenuto utilizzando un disegno *split plot* che permette al ricercatore di considerare quanto detto e, allo stesso tempo, utilizzare piani specifici che siano efficienti e versatili sotto il profilo della conduzione dell'esperimento.

Il lavoro, anche per i fini didattici che si prefigge, è ampiamente integrato da esempi che possono aiutare nell'interpretazione delle strutture sperimentali illustrate; al tempo stesso si presuppone la conoscenza da parte del lettore dei fondamenti del disegno degli esperimenti e del disegno fattoriale frazionale.

La struttura del lavoro è la seguente: nel primo capitolo si descrive il disegno *split-plot*; il secondo capitolo è dedicato alla descrizione del *robust design* con un breve cenno al *product-array* di Taguchi; il terzo capitolo riguarda invece la relazione tra il disegno *split-plot* e il concetto di robustezza, secondo gli sviluppi dell'ultimo decennio. Il quarto capitolo è finalizzato a una breve

♦ Il lavoro è frutto dell'opera comune di entrambe le autrici; tuttavia, Berni ha curato i capitoli 2,3,4; Pallottini il capitolo 1.

rassegna critica in cui si illustra la relazione tra *split-plot*, fattoriale frazionale e metodologia delle superfici di risposta, secondo alcuni lavori presenti in letteratura.

Capitolo 1

Il disegno sperimentale *Split-plot*

1.1 Introduzione

Lo *Split-Plot Design* (SPD), o disegno ad unità suddivise, appartiene alla categoria dei disegni sperimentali *multi-factor* ed è spesso utilizzato negli esperimenti condotti in contesti agricoli e industriali, o in laboratorio.

In particolare, lo *split-plot* viene utilizzato nei casi in cui all'interno della situazione sperimentale si vogliono analizzare determinati fattori, i cui livelli difficilmente possono essere variati rispetto ad altri fattori, sia per eccessivi costi, sia per restrizioni imposte dal processo stesso. Talvolta può risultare utile in situazioni in cui non è conveniente l'uso del disegno a blocchi randomizzati, che risulta in generale meno efficiente.

Pianificare uno *split-plot* comporta una notevole riduzione sia dei costi che dei tempi necessari alla conduzione dell'esperimento. In presenza, infatti, di fattori con suddette caratteristiche risulta impossibile pianificare un disegno completamente randomizzato, e pertanto è necessaria l'introduzione di determinate restrizioni alla randomizzazione.

Un aspetto particolarmente importante è la relazione esistente tra il disegno fattoriale frazionale (Logothetis e Wynn, 1989) e il disegno *split-plot*. Infatti, in questo disegno i trattamenti vengono spesso assegnati secondo uno schema fattoriale e si preferisce, al fine di ridurre il numero di prove sperimentali necessarie, utilizzare lo schema del disegno fattoriale frazionale, che ritroveremo con il termine *Fractional-Factorial-Split-Plot design*.

1.2 Un Esempio

Per facilitare la comprensione dello *split-plot* si illustra in questo paragrafo un semplice caso di applicazione; nel paragrafo 1.3 se ne illustra la struttura secondo una visione più articolata e meno semplificata.

Si consideri (Salvi, Chiandotto 1978) un esperimento in cui vi siano tre trattamenti: A_1 , A_2 , A_3 dati da 3 diversi livelli di irrigazione disposti secondo un disegno a blocchi randomizzati, in cui i tre blocchi sono costituiti da appezzamenti di terreno, che devono avere una determinata estensione prefissata.

Ogni blocco b_i ($i=1, \dots, 3$) può essere rappresentato nel modo seguente, dove ogni rettangolo, interno al blocco, rappresenta una particella di terreno:

A_3			
A_1			
A_2			

Si supponga inoltre di avere un secondo fattore di interesse, dato da una particolare coltura, ad esempio il mais, analizzato a 4 livelli: m_t ; $t=1, \dots, 4$; essendo necessaria, per ogni livello del mais, una minore estensione di terreno, si ha, per ogni blocco, la seguente struttura:

Fig.1.1: Struttura dello *split-plot* per singolo blocco

A_3 m_3	m_1	m_2	m_4
A_1 m_1	m_4	m_2	m_3
A_2 m_1	m_2	m_4	m_3

Si noti che ognuna delle tre particelle è comunque caratterizzata dallo stesso tipo di irrigazione per riga.

Pertanto, per la prima particella di questo generico blocco si hanno 4 combinazioni sperimentali: A_3m_3 , A_3m_1 , A_3m_2 , A_3m_4 . In totale si hanno 12 combinazioni (trattamenti) per blocco.

La particella A_j generica ($j=1, \dots, 3$) è pertanto l'unità (*plot*) suddivisa (*split*) in tante sezioni (*sub-unità* o *sub-units*) quante sono le varietà del mais. Questa è la particolare struttura di un disegno *split-plot*, che si distingue dal fattoriale a blocchi proprio perché in quest'ultimo caso l'assegnazione dei 12 trattamenti avverrebbe senza alcun vincolo nella conduzione dell'esperimento, come vedremo ancora meglio nel paragrafo seguente.

1.3 La struttura del disegno

Un'eccellente esposizione relativa allo *split-plot* viene proposta da Cochran e Cox (1957), cui facciamo riferimento in questo paragrafo. Lo *split-plot* è particolarmente utile nel caso in cui uno o più fattori possono essere considerati come fattori di classificazione. Con fattore di classificazione si intende un fattore non considerato di maggiore interesse e/o i cui livelli

difficilmente possono essere fatti variare. Tali fattori vengono introdotti nell'esperimento per analizzare in che modo essi, interagendo con gli altri fattori, ne possano modificare l'azione, oppure, semplicemente, per analizzarne il comportamento. Agli effetti principali dei fattori di classificazione non si attribuisce particolare importanza, sono introdotti nel disegno soprattutto con lo scopo di analizzare la loro relazione con gli altri fattori considerati; proprio per questo motivo si è disposti ad accettare una minore precisione delle stime degli effetti dei fattori di classificazione, in ragione di una migliore precisione per gli altri fattori e per le interazioni di particolare interesse.

Nella pianificazione di un disegno *split-plot* le unità sperimentali considerate vengono suddivise in una prima fase in *whole-unit*, ovvero in gruppi di unità a cui vengono assegnati i diversi livelli dei fattori di classificazione. Successivamente, ogni *whole-unit* viene suddivisa in *sub-units*; con tale termine si fa riferimento ai sottogruppi di unità, che compongono ciascuna *whole-unit*, per i quali il livello dei fattori di classificazione rimane fisso, mentre vengono fatti variare i livelli degli altri fattori.

Utilizzando sempre la terminologia associata allo *split-plot*, facciamo riferimento ai fattori di classificazione col termine *whole-plot factors*; il livello di tali fattori risulta fisso, e quindi invariato, per ogni sottogruppo interno alla *whole-unit*.

Riassumendo, ad ogni *whole-unit* è associato un trattamento, in modo casuale, combinazione dei livelli dei fattori di classificazione, ogni *whole-unit* viene successivamente suddivisa in sub-unità, per le quali il livello dei fattori di classificazione è fisso e variano i trattamenti associati ad esse, relativamente agli altri fattori delle *sub-units*.

La restrizione alla randomizzazione introdotta in questo tipo di disegno, a cui prima abbiamo fatto riferimento, deriva proprio dal fatto che l'associazione dei trattamenti alle sub-unità non avviene in modo completamente randomizzato. Ogni trattamento, infatti, deve comparire una ed una sola volta all'interno di ciascuna *whole-unit*.

L'esempio (fig.1.2) propone la schematizzazione di uno *split-plot* in presenza di due fattori: A , con cinque livelli, e B a due livelli; il disegno presenta tre blocchi (b_1, b_2, b_3), in ognuno dei quali compare ciascun livello del fattore A che contraddistingue le *whole-units*, all'interno di ogni *whole-unit* sono presenti due *sub-units*, a ciascuna delle quali è associato casualmente un livello del fattore B . Come precedentemente specificato, in tutte le *whole-units* ritroviamo tutti i livelli del fattore B , ognuno dei quali è presente una sola volta.

Fig.:1.2 Esempio di *split-plot*

	b ₁					b ₂					b ₂				
WU	A ₃	A ₅	A ₂	A ₁	A ₄	A ₄	A ₂	A ₁	A ₃	A ₅	A ₂	A ₅	A ₁	A ₄	A ₃
SU	B ₂	B ₁	B ₂	B ₂	B ₂	B ₂	B ₂	B ₁	B ₁	B ₂	B ₁	B ₁	B ₂	B ₁	B ₂
	B ₁	B ₂	B ₁	B ₁	B ₁	B ₁	B ₁	B ₂	B ₂	B ₁	B ₂	B ₂	B ₁	B ₂	B ₁

Emerge in modo evidente che la differenza tra lo *split-plot* e un disegno a blocchi randomizzati risiede proprio nel fatto che in quest'ultimo i dieci trattamenti considerati (A_3B_2 , A_3B_1 , A_5B_1 ,...) vengono assegnati, entro ogni blocco, alle dieci sub-unità sperimentali in modo completamente randomizzato, mentre nello *split-plot* le due combinazioni sperimentali che hanno il livello del fattore A fissato, per esempio A_3B_2 e A_3B_1 , compaiono entrambe nella stessa *whole-unit*.

Si noti inoltre il ruolo del blocco, che è in sostanza una replicazione.

Questo disegno presenta però, accanto ai lati positivi come la flessibilità nella conduzione dell'esperimento, alcuni importanti limiti, i quali saranno opportunamente approfonditi nei successivi paragrafi; tra questi, anticipiamo, il fatto di produrre stime con bassa precisione per gli effetti di classificazione, svantaggio che ne limita l'uso ad analisi in cui questo tipo di fattori non sia di reale interesse; inoltre si ha la presenza di una duplice fonte di errore che complica notevolmente l'analisi. La duplice fonte di errore deriva dalle due distinte randomizzazioni. Per quanto appena affermato l'utilizzo del disegno *split-plot* si è diffuso soprattutto in contesti in cui la necessità di un'elevata precisione delle stime è richiesta esclusivamente per alcuni fattori, e non per altri; oppure in casi in cui, come vedremo nel secondo capitolo, si ritiene necessario distinguere al meglio il ruolo dei fattori per la determinazione di un processo ottimale.

1.4 L'assegnazione dei fattori

I fattori, nel disegno considerato, vengono distinti in più gruppi sulla base della loro facilità nell'essere variati di livello; si hanno così, ad esempio, due gruppi: il gruppo del I ordine e quello del II ordine; si noti che l'ordine, e quindi il numero dei gruppi, può crescere in relazione alla "gerarchia" dei fattori.

Tra i gruppi così creati quello di ordine più alto include quei fattori per i quali si riscontra maggiore difficoltà nel variare i livelli, mentre il gruppo di ordine minore include, di conseguenza, quei fattori i cui livelli variano molto facilmente.

Per quanto riguarda invece le interazioni tra i fattori e la relativa analisi, vengono proposte alcune regole per la loro assegnazione ai vettori componenti il disegno:

- a) L'interazione tra due fattori appartenenti a gruppi differenti, di ordini diversi, viene assegnata ad una colonna appartenente al gruppo di ordine maggiore.
- b) L'interazione tra due fattori appartenenti allo stesso gruppo viene assegnata ad una colonna di un gruppo di ordine minore.
- c) Nel caso in cui l'interazione tra due fattori corrisponda a più di una colonna, per esempio nel caso d'interazione tra due fattori a tre livelli, solo una di suddette colonne appare nel disegno, e precisamente in un gruppo di ordine minore.

Proponiamo qui di seguito una tabella che mostra l'applicazione delle regole appena introdotte. In figura 1.3, vediamo chiaramente, per esempio, che l'interazione tra i fattori *A* e *C*, due fattori che appartengono a gruppi di ordine diverso, il primo al gruppo del I ordine e il secondo al gruppo del III ordine, viene assegnata ad una colonna del gruppo del III ordine, che è il gruppo con ordine superiore tra i due contenenti i fattori considerati, a conferma del punto a). Da un punto di vista pratico, e lo si può notare anche dalla figura 1.3, i livelli dei fattori appartenenti al gruppo del I ordine possono cambiare massimo quattro volte, ciò vuol dire che il fattore *A* rimarrà fisso al primo livello per quattro osservazioni consecutive; inoltre, se nell'analisi vengono considerati fattori i cui livelli cambiano molto difficilmente, è consentita la creazione di un gruppo misto, che contiene cioè fattori appartenenti a tutti e tre i gruppi, che consente di lasciare non assegnata una delle colonne del gruppo primario. Nel caso dell'esempio due sono le colonne non assegnate, contraddistinte con "e" ad indicazione dei vettori utilizzati per la stima delle due componenti di errore.

Fig.:1.3 Struttura matriciale dello *split-plot*

fattori	A	B	e	C	AxC	D	e
colonne	1	2	3	4	5	6	7
osservazioni							
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
gruppi	1	2				3	
	gruppi	primari			gruppo	secondario	

1.5 Il modello statistico

In questo paragrafo si illustra il modello statistico corrispondente ad un disegno sperimentale *split-plot*. Il metodo di analisi della varianza (ANOVA) ad un unico criterio di classificazione risulta sufficiente per i nostri obiettivi iniziali; si deve però sottolineare che, in questo caso, nel modello statistico è presente una duplice fonte di errore, dovuta, come vedremo, alla possibile presenza di correlazione tra osservazioni sperimentali appartenenti a differenti *sub-units* di una stessa *whole-unit*.

Inoltre, in questo contesto, è importante sottolineare la corrispondenza esistente tra modello statistico e disegno sperimentale. Infatti, una volta pianificato il disegno sperimentale e dopo aver assegnato i trattamenti alle unità sperimentali secondo opportuni criteri ed aver effettuato le prove, gli esiti dell'esperimento possono essere idealmente spiegati attraverso un modello statistico.

Consideriamo il caso generale in cui sono presenti due fattori: A e B , il primo applicato alle *whole-unit* con t livelli ($j=1, \dots, t$), mentre il secondo applicato alle *sub-units* con s livelli ($k=1, \dots, s$); ipotizziamo inoltre che l'esperimento preveda l'esecuzione di n prove, e quindi n osservazioni sperimentali. Il modello utilizzato per analizzare la variabile di risposta Y , è il seguente:

$$Y_{ijk} = \mu + \rho_i + \alpha_j + \delta_{ij} + \beta_k + (\alpha\beta)_{jk} + \varepsilon_{ijk} \quad (1.1)$$

in cui:

$i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, t$ e $k = 1, 2, \dots, s$; e dove:

μ è il valor medio delle osservazioni, ρ_i rappresenta l'effetto dell' i -esimo blocco o replica, α_j l'effetto del j -esimo livello del fattore A , δ_{ij} rappresenta la componente erratica associata alla *whole-units* relativa all' i -esimo blocco e al j -esimo livello del fattore A , β_k rappresenta invece l'effetto del k -esimo livello del fattore B , $(\alpha\beta)_{jk}$ è la componente relativa all'interazione tra i fattori A e B , associata al trattamento corrispondente all'applicazione del j -esimo livello del fattore A e del k -esimo livello del fattore B , ε_{ijk} infine, rappresenta la componente erratica associata alle *sub-units*.

Naturalmente il modello appena descritto può essere esteso ai casi in cui più fattori, più *whole-factors* e più *sub-factors*, vengono considerati.

Le assunzioni del modello appena descritto riguardano le due componenti di errore che vengono ipotizzate indipendenti e identicamente distribuite secondo una distribuzione Normale con media nulla e varianza costante; quest'ultima sarà pari a σ_{wp}^2 per la componente erratica relativa alle *whole-units* e pari a σ_{sp}^2 per quella associata alle *sub-units*. Ovvero:

$$\delta_{ij} \sim \text{IID } N(0, \sigma_{wp}^2) \text{ e } \varepsilon_{ijk} \sim \text{IID } N(0, \sigma_{sp}^2).$$

1.5.1 La natura dell'errore sperimentale

Come già accennato nel paragrafo precedente, in questa tipologia di disegno sperimentale particolare attenzione è dovuta al fatto che le osservazioni appartenenti a *sub-units* diverse, ma di una stessa *whole-unit*, possono essere tra loro correlate; a titolo di esempio possiamo considerare gli esperimenti condotti in ambito agricolo; in tali casi, per esempio, la correlazione nasce dal fatto che appezzamenti di terreno vicini tra loro tendono ad essere simili, relativamente alla fertilità o ad altre caratteristiche specifiche.

Per analizzare il problema della correlazione presente tra le osservazioni consideriamo di nuovo la situazione illustrata nei precedenti paragrafi: siamo quindi in presenza di un fattore applicato alle *whole-units*, il fattore A che varia a t livelli, e un fattore applicato alle *sub-units*, il fattore B che varia a s livelli, mentre con n indichiamo il numero delle replicazioni; in tal caso, per le *sub-units* appartenenti ad una stessa *whole-unit*, i e j rimangono invariati.

In base a quanto detto si assume che tra la componente erratica ε_{ijk} e la componente ε_{iju} , ovvero tra errori associati a due *sub-units* di una stessa *whole-units*, esista una correlazione, che indichiamo con ρ , mentre si ipotizza che *sub-units* appartenenti a diverse *whole-units* siano incorrelate, avremo, di conseguenza:

$$E(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{iju}) = \rho\sigma^2 \quad \text{e} \quad E(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{stu}) = 0 \quad (1.2)$$

Si considerino, ora, gli effetti di una tale situazione sui confronti tra trattamenti sperimentali che verranno analizzati. Gli effetti principali che il fattore A esercita sulla variabile risposta considerata vengono stimati sulla *whole-unit* completa, nel caso in cui ogni *whole-unit* sia composta da due *sub-units*¹ la varianza della componente erratica associata alla singola *whole-unit* è pari a:

$$E(\varepsilon_{ij1} + \varepsilon_{ij2})^2 = E(\varepsilon_{ij1}^2) + E(\varepsilon_{ij2}^2) + 2E(\varepsilon_{ij1}\varepsilon_{ij2}) = \sigma^2 + \sigma^2 + 2\rho\sigma^2 = 2\sigma^2(1 + \rho) \quad (1.3)$$

Pertanto, per l'effetto principale del fattore A , la varianza di errore per le *sub-units* è pari a:

$$\sigma^2(1 + \rho) \quad (1.4)$$

Se nel disegno sono presenti s *sub-units* per ciascuna *whole-unit*, la corrispondente componente erratica sarà pari a:

¹ Ricordiamo che i concetti illustrati possono essere estesi sia a casi in cui si considerano più fattori, sia se cambia il numero delle *whole-units* e delle *sub-units* individuate.

$$\sigma^2 [1 + (s - 1)p] \quad (1.5)$$

D'altra parte, gli effetti principali del fattore B vengono stimati attraverso le differenze osservate tra due *sub-units* appartenenti alla stessa *whole-unit*.

In questo caso abbiamo che:

$$E(\varepsilon_{ij1} - \varepsilon_{ij2})^2 = 2\sigma^2(1 - \rho) \quad (1.6)$$

e quindi la varianza effettiva associata a ciascuna *sub-unit* è pari a: $\sigma^2(1-\rho)$. Si noti che la formula (1.6) non dipende dal numero di *sub-units*; inoltre, la (1.6) rappresenta la stima della componente d'interazione tra il fattore A e il fattore B , in quanto coinvolge il confronto $(b_1 - b_0)$ entro i differenti livelli di A presi in considerazione².

Per altri tipi di confronti, la varianza relativa alla componente erratica può risultare diversa dalle espressioni appena presentate. Consideriamo, per esempio $(a_3b_0 - a_1b_0)$, ovvero il confronto tra il terzo livello ed il primo livello del fattore A , condizionatamente al livello zero del fattore B ; in ciascuna replicazione effettuata, le due *sub-units* considerate appartengono a *whole-units* differenti, e di conseguenza, sono indipendenti. Verificato ciò, la varianza della loro differenza è pari a $2\sigma^2$, e la varianza relativa a ciascuna *sub-unit* è data da σ^2 .

Si osservi, comunque che, per ogni particolare confronto tra trattamenti analizzato, le espressioni appropriate per le due componenti di variabilità possono essere facilmente ricavabili da quelle generali precedentemente illustrate nelle formule (1.4) e (1.5).

Un altro aspetto da puntualizzare riguarda ρ che è, nella quasi totalità dei casi, positivo. Questo risultato implica che l'effetto principale del fattore A viene stimato con meno precisione rispetto all'effetto del fattore B ed all'interazione AB ³. Questa minore precisione delle stime è estesa a tutti quei fattori considerati di classificazione, come già detto più volte in precedenza.

1.5.2 L'analisi della varianza nello *split-plot*

Prima di introdurre e spiegare il metodo dell'analisi della varianza all'interno del disegno *split-plot* è importante ricordare che l'associazione dei trattamenti alle *whole-units* avviene applicando il principio della randomizzazione; la randomizzazione per l'assegnazione dei trattamenti a ciascuna *sub-unit* avviene all'interno di ogni *whole-unit*; all'interno di ciascuna di esse, quindi, viene effettuato un processo di randomizzazione distinto.

² Per approfondimenti si veda: Cochran e Cox (1957).

³ Essendo ρ positivo la componente di variabilità associata alle *whole-units* risulta maggiore di quella relativa alle *sub-units*.

Presentiamo in figura 1.4 la ripartizione dei gradi di libertà per l'analisi della varianza per un disegno *split-plot*, nel caso in cui il fattore *A* applicato alle *whole-units* abbia *t* livelli, e il fattore *B*, applicato alle *sub-units*, abbia *s* livelli. Con *n* si indica il numero dei blocchi, o repliche.

Fig.:1.4 Scomposizione dei gradi di libertà per lo *split-plot*

whole units	gradi di libertà
blocchi	$(n - 1)$
A	$(t - 1)$
errore (a)	$(t - 1)(n - 1)$
totale	$(nt - 1)$
sub units	
B	$(s - 1)$
AB	$(t - 1)(s - 1)$
errore (b)	$t(n - 1)(s - 1)$
totale	$nt(s - 1)$

In figura 1.5 si illustra invece il prospetto riassuntivo di ANOVA⁴ in un disegno *split-plot*. Il prospetto riassume le fonti di variabilità per un modello misto, nel quale il fattore blocco viene assunto come fattore a effetti casuali, mentre i fattori *A* e *B* sono fattori ad effetti fissi. Per fattore casuale, o analogamente effetto casuale o fattore ad effetti casuali, s'intende quel fattore i cui livelli sono selezionati casualmente dalla popolazione; in tal caso, il ricercatore non è espressamente interessato ai singoli livelli di esso, quanto piuttosto alla stima della componente di variabilità ad esso attribuita. Per esempio, si può pensare alla selezione casuale di *h* strumenti per la lettura ottica da una linea di produzione e produrre una serie di dati da ogni strumento selezionato.

In questo lavoro viene dedicata particolare attenzione ai fattori ad effetti fissi, data la particolare attenzione all'applicazione dello *split-plot* nell'ambito della robustezza del disegno.

Nella tabella riassuntiva (fig. 1.5) la componente indicata con Errore1 rappresenta l'errore relativo alle *whole-units* ed equivale all'interazione tra il fattore blocco e il fattore *A*; l'altra componente erratica, indicata con Errore2, è l'errore associato alle *sub-units*, che equivale alla somma della componente d'interazione tra il fattore blocco ed il fattore *B* e quella d'interazione tra *A*, *B* e il fattore blocco.

⁴ Per semplicità indichiamo con SS (*Sum of Squares*) la stima della devianza e con MS (*Mean Squares*) la stima della varianza.

Fig.: 1.5 Tabella riassuntiva di Analisi della Varianza

Fonte var.	g.l.	SS	MS	Test F
Whole-plot	$nt - 1$	SS_{Mp}		
Blocchi	$n - 1$	SS_{Bl}	MS_{Bl}	
A	$t - 1$	SS_A	$MS_A = \frac{SS(A)}{(t-1)}$	MS_A/MSE_1
Errore1	$(n-1)(t-1)$	SSE_1	$MSE_1 = \frac{SS(E_1)}{(n-1)(t-1)}$	
Sub-plot	$nt(s-1)$	SS_p		
B	$s - 1$	SS_B	$MS_B = \frac{SS(B)}{s-1}$	MS_B/MSE_2
AB	$(t-1)(s-1)$	SS_{AB}	$MS_{AB} = \frac{SS(AB)}{(t-1)(s-1)}$	MS_{AB}/MSE_2
Errore2	$(n-1)t(s-1)$	SSE_2	$MSE_2 = \frac{SS(E_2)}{t(n-1)(s-1)}$	
Totale	$nts - 1$	SST		

in cui:

$$\begin{aligned}
 SS_{bl} &= ts \sum_{i=1}^b (\bar{y}_{..k} - \bar{y}_{...})^2 \\
 SS_A &= nt \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 \\
 SS_{E1} &= s \sum_{i,k} (\bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..k} + \bar{y}_{...})^2 \\
 SS_B &= nt \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{.j.} - \bar{y}_{...})^2 \\
 SS_{AB} &= n \sum_{i,j} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..} - \bar{y}_{.j.} + \bar{y}_{...})^2 \\
 SS_{E2} &= \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{i.k} - \bar{y}_{.jk} + \bar{y}_{...})^2
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pertanto si ha che le fonti di errore sono formate dagli effetti di interazione di ordine superiore ritenuti trascurabili. In particolare, il fatto di assumere il fattore blocco come fattore casuale permette di ipotizzare che le componenti d'interazione tra quest'ultimo e i fattori A o B siano trascurabili. Inoltre, nella pratica, MSE_1 dovrebbe essere generalmente maggiore di MSE_2 .

Si noti che in questa tipologia di disegno, gli effetti principali vengono confusi con l'effetto blocco, in contrasto, quindi, con quanto avviene nel disegno fattoriale, in cui viene considerato solo l'effetto di confondimento tra interazioni.

Per ciò che riguarda la significatività degli effetti, va sottolineato che questa, proprio per la presenza nel disegno di una duplice fonte di errore, viene verificata entro il gruppo. Condizione necessaria affinché la componente erratica di ciascun gruppo possa essere utilizzata per effettuare il test è che essa risulti significativa nel test d'ipotesi effettuato rispetto alla componente erratica del gruppo di ordine superiore. Se quanto appena detto non si verifica, allora gli effetti di quel gruppo vengono verificati rispetto alla componente erratica del gruppo di ordine superiore.

Volendo spiegare il motivo per cui l'utilizzo del disegno *split-plot* è opportuno quando siamo interessati alla stima dell'effetto del fattore B e dell'interazione tra A e B , piuttosto che alla stima dell'effetto di A , si consideri, a titolo di esempio, un disegno *split-plot* (fig.1.6) relativo a due fattori, A e B , rispettivamente con due e tre livelli. A tal fine si consideri la seguente struttura, che mostra come le unità sperimentali possano essere disposte considerando i livelli di A come blocchi randomizzati, in cui il numero di replicazioni è pari a tre (3 blocchi).

Fig.:1.6 Esempio di *split-plot*

Blocco1			Blocco2			Blocco3		
a ₁	a ₂	a ₃	a ₃	a ₁	a ₂	a ₂	a ₃	a ₁
b ₁	b ₂	b ₁	b ₁	b ₁	b ₂	b ₂	b ₁	b ₁
b ₂	b ₁	b ₂	b ₂	b ₂	b ₁	b ₁	b ₂	b ₂

Data una tale struttura, l'analisi dell'effetto principale di A è effettuata rispetto alla prima componente erratica per le unità sperimentali disposte in blocchi; una seconda analisi sarà relativa alla stima dell'effetto principale del fattore B e dell'interazione tra A e B , rispetto alla seconda componente erratica, entro i livelli del fattore A .

Nel disegno qui considerato l'effetto di A , ovvero l'effetto tra i livelli di A , coincide con l'effetto tra blocchi, cioè l'effetto dovuto alla randomizzazione in blocchi.

Per questa ragione tale disegno risulta opportuno per la stima dell'effetto di B e della componente d'interazione, in quanto il fattore A si presume di natura sub-sperimentale e assume la stessa funzione del fattore blocco in un disegno a blocchi completamente randomizzati, la cui stima, non è, in generale, di particolare interesse.

Capitolo 2

Il concetto di *Robust Design*

2.1 Introduzione

Lo scopo principale di questo capitolo è quello di introdurre il concetto di *Robust Design*, ovvero di progettazione robusta. L'introduzione di questo importante fondamento della pianificazione sperimentale si deve a Genichi Taguchi, nell'ambito del metodo denominato *Parameter Design*. In questa sede si tralascia l'illustrazione di questa tecnica, per la quale si rimanda a Berni (1999) e a Kackar (1985). È peraltro noto in letteratura che, se si deve a Taguchi l'introduzione del concetto di progettazione robusta, al tempo stesso lo sviluppo concreto di questa strategia di pianificazione si deve al successivo dibattito che si è sviluppato nel corso degli anni '80 e inizi anni '90 proprio in relazione ai punti critici della metodologia di Taguchi.

In particolare, il punto di partenza del concetto di *Robust Design* è il disegno sperimentale definito da Taguchi, detto *product-array*, il quale è un disegno sperimentale progettato per rendere il prodotto robusto rispetto alle fonti di variabilità esterne e interne⁵ che risultano di disturbo per la qualità del prodotto stesso, in quanto influenti sui fattori di interesse per la progettazione.

Pertanto, per meglio chiarire i concetti di fonte di variabilità di disturbo interna e esterna e per puntualizzare lo sviluppo che è possibile ottenere nell'ambito del *Robust Design* con l'applicazione dello *split-plot*, illustriamo in questa parte del lavoro il *product-array* ed i principali concetti, relativi al ruolo dei fattori nell'ambito della progettazione robusta.

2.2 Il *product-array* di Taguchi

Il concetto fondamentale della filosofia di Taguchi, e del controllo di qualità *off-line* in generale, è quello di riuscire a controllare quanto più possibile le fonti di variabilità che, a vario titolo, agiscono sul prodotto, o sul processo produttivo, e che possono causarne un malfunzionamento, agendo di conseguenza sulla qualità del prodotto stesso. Controllare le fonti di variabilità corrisponde a ridurre la variabilità residua durante la fase di progettazione del prodotto, e quindi prima di giungere alla produzione effettiva di esso, agendo tramite il disegno degli esperimenti e la pianificazione sperimentale. In particolare, assunte una o più variabili di risposta a misura del nostro prodotto, si procede alla lista e successivamente alla selezione di tutti quei fattori che agiscono sulla misura di qualità (variabile di risposta) di quest'ultimo.

Uno dei principi fondamentali dell'intera filosofia di *Taguchi* che merita di essere qui menzionato, in quanto è strettamente connesso al concetto di *Robust Design*, è che durante la progettazione del

⁵ Queste ultime comunque esterne al processo produttivo.

prodotto si deve tenere conto di tutte quelle fonti di variabilità alle quali il prodotto sarà soggetto durante il suo ciclo di vita. Pertanto il prodotto deve essere robusto a tali fonti di variabilità in modo da garantire elevate prestazioni.

La procedura *Parameter Design* introdotta da Taguchi può essere riassunta nei seguenti passi:

- 1) Identificazione dei fattori del disegno (fattori controllabili) e dei fattori *noise*, conseguente determinazione dei relativi campi di variazione.
- 2) Pianificazione del disegno sperimentale.
- 3) Conduzione dell'esperimento e valutazione delle misure di prestazione.
- 4) Determinazione della combinazione ottimale dei livelli dei fattori di controllo.
- 5) Verifica degli effettivi miglioramenti apportati alla fase 4.

Di questi cinque passi si illustra, brevemente, nel paragrafo 2.3.1, il *product-array* di Taguchi, rimandando per la completa descrizione del metodo a Berni (1999).

2.2.1 Il ruolo dei fattori nell'ambito della progettazione robusta

Secondo la filosofia di *Taguchi*, due sono le categorie di fattori che agiscono sulla variabilità di un prodotto: i fattori controllo e di aggiustamento⁶, o fattori di disegno, e i fattori di disturbo, o fattori *noise*.

I fattori di controllo e quelli di aggiustamento⁷ rappresentano quelle variabili, interne al processo produttivo, che riguardano la “taratura” ottimale del prodotto in fase di progettazione. Sono quei fattori che nell'ambito classico sono definiti sperimentali o di interesse e sono di particolare importanza in quanto la selezione della loro combinazione ottimale permette la definizione del migliore risultato sperimentale in fase di progettazione in merito a: raggiungimento del target e minimizzazione della variabilità.

I fattori di controllo, secondo la scuola statunitense⁸, sono fattori i cui livelli vengono fatti variare dallo sperimentatore stesso; quest'ultimo ha, quindi, pieno controllo su di essi, i quali vengono infatti definiti, nel nostro contesto, quali fattori influenti, misurabili e controllabili.

L'insieme dei fattori influenti è però costituito anche da altri gruppi di variabili che possono essere non misurabili e/o non controllabili. In primo luogo, tra questi posso esistere fattori di disegno non misurabili, e di conseguenza non controllabili, oppure fattori di interesse che possono essere mantenuti al loro livello nominale (*held constant factors*). Tra questi fattori influenti vi sono anche i

⁶ Riuniti, secondo alcuni autori, in un unico gruppo indicato col termine di *fattori di controllo*; la suddivisione in fattori di controllo e di aggiustamento si deve soprattutto ad autori italiani.

⁷ Non è qui necessario definire il concetto di target. Si ricordi che in generale il valore del target può essere specificato, in sede tecnica, in relazione alla variabile di risposta assunta come misura di qualità in fase di progettazione.

⁸ I concetti espressi in questo paragrafo rappresentano un compendio, in base alla letteratura degli ultimi anni, dei concetti di pianificazione sperimentale e di *Robust Design*, compendio che supera la definizione di progettazione robusta come definita da Taguchi.

fattori *noise*, o fattori disturbo, che si distinguono in più categorie: non misurabili, misurabili ma non controllabili, sia misurabili che controllabili. Tra i fattori *noise* possiamo ovviamente avere anche fattori non influenti, o comunque non misurabili né controllabili, il cui effetto va a confluire in quella componente residua che non può essere totalmente eliminata.

Il problema della non misurabilità dei fattori, sia per i fattori di controllo che per i fattori *noise*, può derivare o da eccessivi costi per la relativa misurazione, o dalla difficoltà o impossibilità vera e propria di misurarli. Per i fattori di controllo diventa importante poterli “controllare” in quanto questo permette poi di poter tarare in modo ottimale il prodotto. I fattori *noise* si distinguono, rispetto al processo produttivo, in interni ed esterni, ed agiscono sulla variabile di risposta direttamente o, come spesso accade, indirettamente, influenzando direttamente i fattori di controllo. Il concetto di progettazione robusta è sostanzialmente legato alla possibilità di considerare, in fase di pianificazione sperimentale, fattori *noise* influenti che siano anche misurabili e/o controllabili; è ovvio che fattori *noise* che non siano né controllabili né misurabili sono valutati tramite la variabilità residua.

Se è possibile avere fattori *noise* controllabili e/o misurabili, si ha che la combinazione sperimentale dei fattori di controllo viene “estesa” a questi fattori di disturbo permettendo, in sede di analisi, la valutazione della stima dell’interazione $C \times N$ tra fattori di controllo (C), e fattori Noise (N), stabilendo il livello ottimale del fattore di controllo che è robusto alle variazioni del fattore *noise*.

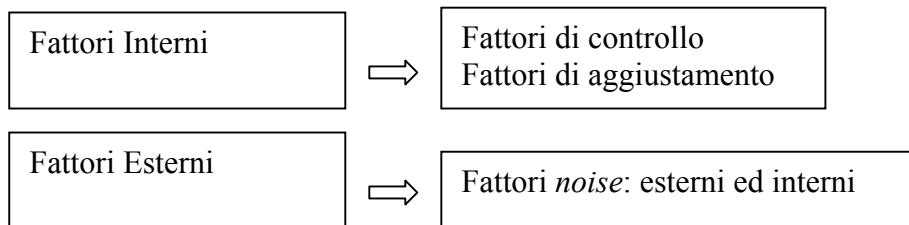
Si noti che, tralasciando per ovvie ragioni l’insieme dei fattori *noise* che sono influenti ma non sono né misurabili né controllabili, i fattori di disturbo che sono misurabili ma non controllabili possono essere analizzati tramite replicazione “classica” ovvero la ripetizione della medesima combinazione sperimentale nelle stesse condizioni sperimentali; al contrario, in caso di fattore *noise* misurabile e controllabile, è possibile utilizzare una replicazione ad effetti fissi che deriva sostanzialmente dal *Product-array* di Taguchi.

Schematizzando, possono verificarsi le seguenti situazioni (fig.2.1).

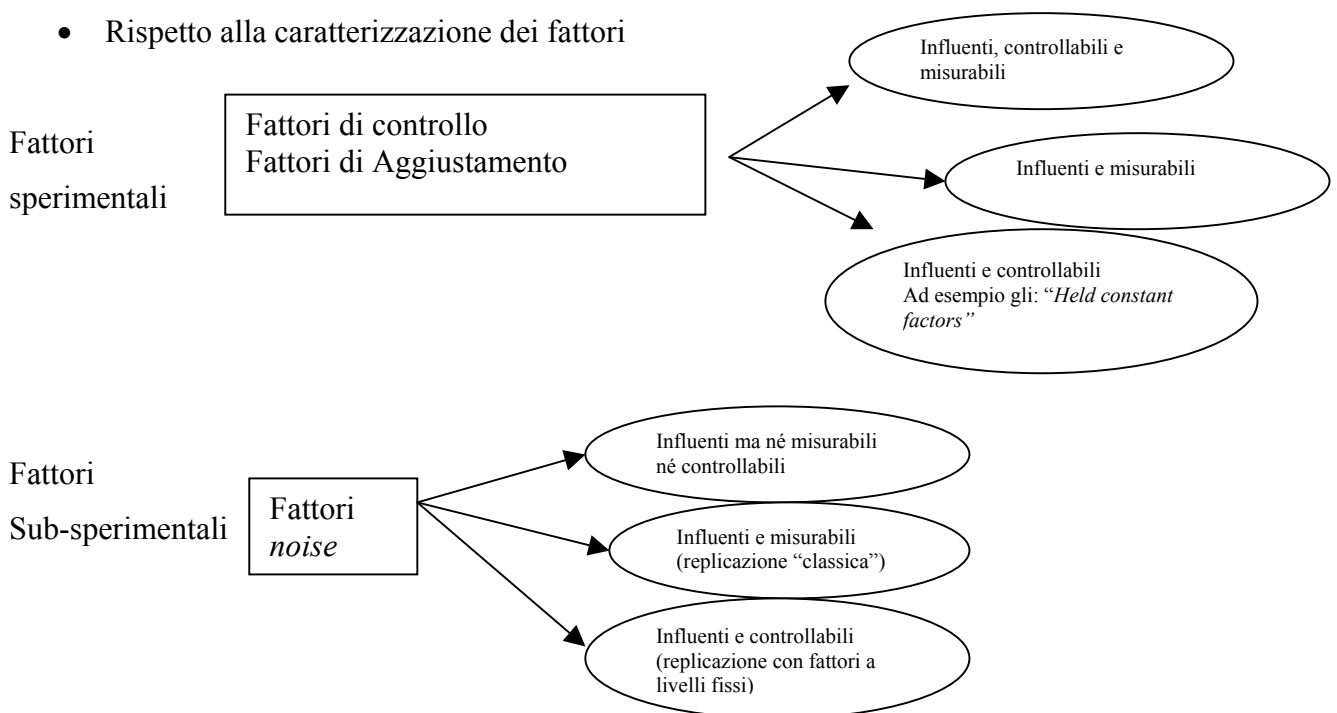
Nella classe dei fattori *noise* esterni rientrano soprattutto le variabili ambientali, o le condizioni di utilizzo, come ad esempio la temperatura, l’umidità, ecc.. Della classe, invece, dei fattori di disturbo interni, ma esterni al processo produttivo, fanno parte i cosiddetti “disturbi da deterioramento”, che possono verificarsi in fase di immagazzinamento.

Fig.:2.1 Schema riassuntivo relativo al ruolo dei fattori

- Rispetto al processo produttivo e al prodotto:



- Rispetto alla caratterizzazione dei fattori



2.3.1 Costruzione del *product-array*

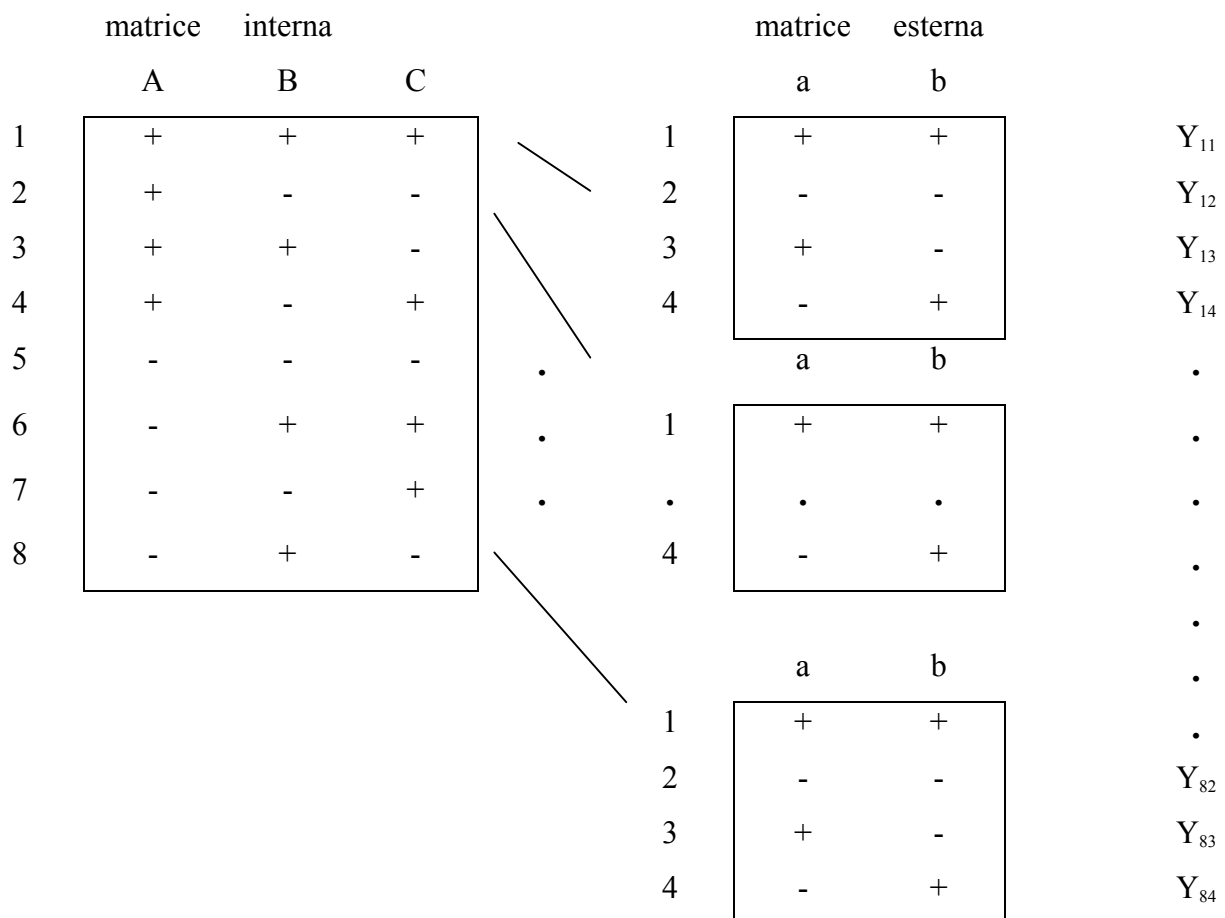
La fase relativa alla costruzione del disegno sperimentale è quella in cui viene introdotta la vera e propria novità presente nella filosofia di *Taguchi* rispetto alle metodologie classiche.

Una volta individuati i fattori influenti sul progetto ed i fattori *noise*, o fattori rumore, si passa alla costruzione del disegno sperimentale. Il metodo di *Taguchi* propone in questa fase l'introduzione di un piano incrociato o *product-array*.

Tale piano è composto da due matrici, entrambe ortogonali, una matrice è detta matrice interna, e in essa sono rappresentati i fattori interni, nell'altra, chiamata matrice esterna, vengono invece inseriti quei fattori *noise* che in sede di pianificazione risultano controllabili e misurabili, nonchè influenti.

Generalmente, il *product-array* può essere associato a due disegni fattoriale frazionali⁹ con un alto grado di frazionamento e quindi bassa Risoluzione e con una complessa struttura di confondimenti. In corrispondenza di ciascuna combinazione sperimentale presente nella matrice interna, relativa quindi ai fattori di controllo e di aggiustamento, vengono effettuate tante prove sperimentali quante sono le combinazioni dei livelli dei fattori *noise* che troviamo nella matrice esterna; la matrice esterna viene definita, proprio per quanto detto, “nidificata” nella matrice interna. Nella figura riportata qui di seguito viene schematizzato quanto detto sulla struttura del disegno di *Taguchi*, ed illustrata la sua rappresentazione grafica (fig.2.2):

Fig.: 2.2: Product-array



In figura 2.2 si illustra un esperimento fattoriale 2^3 cui vengono considerati tre fattori di controllo e di aggiustamento: A , B e C , a due livelli, codificati con $+$ e $-$, pertanto, le combinazioni sperimentali relative sono otto; nella matrice esterna si hanno due fattori di disturbo: a e b , anche questi a due livelli (codificati ancora con $+$ e $-$), per un totale di quattro combinazioni sperimentali. Secondo il

⁹ Per il disegno fattoriale frazionale si rimanda a Myers e Montgomery (1997).

disegno di *Taguchi*, già introdotto, in corrispondenza di ognuna delle otto combinazioni dei livelli dei fattori di controllo vengono effettuate quattro repliche, una per ogni combinazione dei livelli dei fattori *noise*. Il disegno prevede, quindi, complessivamente, l'effettuazione di 32 prove sperimentali: $8 \times 4 = 32$, e di conseguenza, la rilevazione di 32 realizzazioni della variabile casuale *Y*, assunta come variabile di risposta.

Lo svantaggio del *product-array*, che si nota immediatamente, è che all'aumentare del numero dei fattori considerati, sia interni sia *noise*, e dei rispettivi livelli, aumentano notevolmente le prove sperimentali da effettuare. Proprio per questa ragione, essendo l'obiettivo principale dello sperimentatore quello di ridurre il più possibile il numero di prove necessarie, in modo da limitare i costi e i tempi dell'analisi, in alternativa a questo disegno si propone sempre più spesso la pianificazione di un disegno *split-plot*, oppure il *combined-array*¹⁰, che non descriviamo in questa sede.

2.4 Analogie tra il *product-array* e lo *split-plot*

L'idea di un prodotto robusto è fondata, in fase di progettazione, sulla pianificazione di un disegno sperimentale e sulla stima delle interazioni *control x noise*. Abbiamo affermato che il principale svantaggio del *product-array* risiede proprio nell'impossibilità di stimare tali interazioni e, secondariamente, nell'eccessivo numero di prove sperimentali che spesso richiede. Una soluzione a questo problema, proposta anche da *Box e Jones*, (1992), risiede nel sostituire a questo disegno uno *split-plot*.

Volendo tracciare, per quanto possibile, un parallelismo tra il disegno proposto da *Taguchi* e lo *split-plot* possiamo affermare che la variabile di risposta viene inizialmente analizzata rispetto alle combinazioni dei livelli di determinati fattori, cosiddetti fattori di controllo e di aggiustamento, i quali compaiono in quella che *Taguchi* indica con il nome di matrice interna; tale matrice corrisponde alle *whole-units* presenti nello *split-plot*, alle quali vengono assegnati i *whole-plot factors*; successivamente le unità vengono associate ad altre combinazioni fattoriali, relative in questo caso a fattori ambientali, quali per esempio la temperatura o l'umidità, inseriti nella matrice esterna e indicati col termine di fattori *noise*; quest'ultimi corrispondono, nel disegno *split-plot*, ai *sub-plot factors* associati alle *sub-units*. Ricordiamo che, come evidenziato nel primo capitolo, l'assegnazione dei fattori ambientali alle *sub-units* piuttosto che alle *whole-units*, e lo stesso per i fattori del disegno, porta a differenti varianti del disegno proposte in letteratura.

¹⁰ Si veda, per il *combined-array*, Myers et al. (1992).

A tal fine, in questo paragrafo, si illustra la pianificazione di un disegno *split-plot* $2^{k-p} \times 2^{q-r}$ e la relativa analisi, che comprende, naturalmente, l'individuazione dei *confounding effects* all'interno dei due piani fattoriali frazionali¹¹.

In generale si può affermare che il concetto di robustezza si traduce nella necessità di rendere possibile la stima delle interazioni tra fattori interni e fattori ambientali, il che non è consentito nella pianificazione del disegno di *Taguchi*. Supponiamo di voler verificare la robustezza di quattro tipi di motori a combustibile rispetto a variazioni nella qualità della benzina utilizzata. Nella nostra analisi i fattori di interesse sono: il tipo di carburatore, indicato (fig.2.3) con *A*, a due livelli, la candela (fattore *B*), anch'essa a due livelli, ed infine, due diverse proporzioni di raffreddamento, indicate con *C*. I fattori interni illustrati generano un piano fattoriale completo 2^3 , dal quale, come si può osservare nella struttura matriciale (fig.2.3), applicando la frazione $1/2$ otteniamo un piano fattoriale frazionale 2^{3-1} , che implica l'esecuzione di quattro prove sperimentali. Le prove rappresentano, in pratica, quattro tipi di motore, sui quali interessa analizzare l'effetto delle variazioni di quantità della benzina; il fattore ambientale, osservato a due livelli ed indicato con *P*, è la quantità di benzina.

In tale situazione sperimentale potrebbe essere opportunamente utilizzato un disegno *split-plot*, nel quale, come si vede, la colonna *C* viene generata dal confondimento $C = AB$.

Nella figura 2.3, riportata qui di seguito, è rappresentato lo schema di un semplice piano di *Taguchi* standard, come descritto in precedenza.

Fig.:2.3: Esempio di *split-plot*

A	B	C=AB	P	
			-	+
-	-	+	y ₁₁	y ₁₂
+	-	-	y ₂₁	y ₂₂
-	+	-	y ₃₁	y ₃₂
+	+	+	y ₄₁	y ₄₂

Il disegno mostrato nella tabella precedente può essere rappresentato anche con la struttura matriciale alternativa di figura 2.4.

¹¹ La notazione qui utilizzata è quella tipica del fattoriale frazionale, per il quale si rimanda alla letteratura già citata.

Fig.:2.4: Esempio di *split-plot* alternativo

A	B	C	P	
-	-	+	-	Y ₁₁
+	-	-	-	Y ₂₁
-	+	-	-	Y ₃₁
+	+	+	-	Y ₄₁
-	-	+	+	Y ₁₂
+	-	-	+	Y ₂₂
-	+	-	+	Y ₃₂
+	+	+	+	Y ₄₂

Abbiamo, in questo caso, un disegno composto da un'unica matrice che rappresenta un piano fattoriale 2^{3-1} in cui si può facilmente notare che il *defining contrast* utilizzato per frazionare il piano completo è $\mathbf{I} = ABC$, ricordiamo che si tratta di un disegno con Risoluzione III.

Come si vede, (Bisgaard, 2000), l'esperimento può essere condotto in diversi modi; a determinare il modo più opportuno saranno senz'altro le condizioni di analisi più efficienti ed economiche.

In questa circostanza si ritiene vantaggioso condurre l'esperimento secondo un disegno *split-plot*, il quale permette di creare quattro tipi di motore, in accordo al piano fattoriale 2^{3-1} utilizzato per i fattori di disegno, e, mentre i motori sono su strada, si provano i due tipi di benzina selezionati per l'analisi. In tal modo le prove non sono eseguite in modo completamente randomizzato, vengono imposte alcune restrizioni alla randomizzazione che rendono questo fattoriale frazionale un disegno *split-plot*.

Il vantaggio nell'utilizzare uno *split-plot* per un tale esperimento risiede nel fatto che esso richiede soltanto quattro tipi di motore, a differenza di un disegno completamente randomizzato, come quello mostrato nella seconda tabella proposta, il quale richiederebbe per il test un numero maggiore di motori, risultando così economicamente svantaggioso.

Si consideri ora una determinata analisi in cui compaiono comunque i soliti tre fattori di disegno ed un fattore ambientale, come nell'esempio illustrato in precedenza; in questo caso, però, si ipotizza che non esistano difficoltà a variare i livelli dei fattori e che l'assenza di altre restrizioni alla randomizzazione sia di carattere pratico ed economico. In questa situazione le otto prove sperimentali, figura 2.3, possono essere condotte senza alcun problema secondo un disegno completamente randomizzato. Pertanto, in questo caso, risulta più opportuno l'utilizzo di un piano fattoriale 2^{4-1} con Risoluzione IV, in cui $\mathbf{I} = ABCP$, rispetto al piano illustrato in figura 2.3. Esso consente la stima di tutte le interazioni del I ordine tra fattori di disegno e fattori ambientali, che

però risultano confuse con le interazioni tra i fattori interni, in quanto la Risoluzione IV prevede il confondimento tra interazioni del I ordine. Se lo sperimentatore ha necessità di stimare ogni interazione del primo ordine tra fattori di disegno e fattori ambientali, liberandole da ogni possibile confondimento, allora è più opportuno l'utilizzo di un disegno con Risoluzione III eseguito in modo completamente randomizzato, come quello proposto nella seconda struttura matriciale (fig.: 2.4).

In questo paragrafo si è cercato di illustrare le configurazioni di alcuni disegni sperimentali basilari che spesso si trovano nelle applicazioni. Facendo riferimento in particolar modo a Bisgaard (2000), si nota come l'autore, con gli esempi proposti, tenga a sottolineare che la suddivisione dei fattori sperimentali in fattori di disegno (controllo e aggiustamento) e fattori ambientali (*noise*) non sempre sia sinonimo di restrizioni alla randomizzazione, e quindi di utilizzo di un disegno *split-plot*. In alcuni casi infatti, come accennato, risulta vantaggioso condurre l'esperimento secondo piani completamente randomizzati anche in presenza di fattori con natura sperimentale diversa; la presenza, invece, di fattori per cui si ritiene più difficoltoso far variare il livello, rispetto ad altri, conduce sempre alla pianificazione di uno *split-plot*.

Bisgaard (2000) sostiene inoltre che l'assegnazione dei fattori ambientali alle *sub-units* e quella dei fattori di disegno alle *whole-units*, che rispecchia la filosofia di *Taguchi*, non sempre risulta la scelta migliore; in alcuni casi è più opportuno, invece, invertire l'assegnazione, oppure ancora, assegnare sia i fattori di disegno che i fattori ambientali ad una stessa colonna di un piano fattoriale frazionale standard, senza imporre alcuna restrizione alla randomizzazione.

Capitolo 3

Il disegno *split-plot* e il concetto di *Robust Design*

In questo capitolo si illustrano le principali caratteristiche dei tre alternativi adattamenti del disegno *split-plot* proposti da Box e Jones (1992). Le tre alternative proposte si distinguono per la diversa assegnazione alle *whole-units* ed alle *sub-units* dei fattori di disegno e dei fattori ambientali.

Le specifiche strutture derivanti da tali alternative sono le seguenti:

- a) Nel primo disegno le *whole-units* sono le unità sperimentali associate ai fattori di classificazione, gli *whole-factors* sono i fattori ambientali; mentre le *sub-units* sono associate ai fattori del disegno.
- b) Nel secondo adattamento proposto, l'assegnazione dei fattori viene invertita: le *whole-units* sono associate ai fattori di disegno e le *sub-units* a quelli ambientali.
- c) Nel terzo adattamento sperimentale, viene proposto uno *split-plot*, detto *strip-block design*¹², in cui i *sub-plot factors* vengono assegnati in strisce, incrociandoli con i *whole-plot factors*;

Per illustrare i tre adattamenti, Box e Jones (1992) propongono l'applicazione ad un esperimento condotto su un lotto di biscotti, con lo scopo di verificare in qual modo i cinque fattori considerati influenzino il risultato ottenuto. Tra i fattori considerati sono presenti due fattori ambientali, ovvero il tempo di cottura (t) e la temperatura del forno (T), e tre fattori interni al processo, ovvero la farina (F), le dimensioni dei biscotti (S) e le uova (E); tutti i fattori sono misurati a due livelli.

3.1 Struttura sperimentale (a): fattori del disegno considerati come *split-plot factors*

Riprendendo il concetto di Cox (1957) in merito ai fattori di classificazione, da noi indicati con il termine *whole-factors*, sembrerebbe molto più ragionevole associare ad essi i fattori ambientali considerati nell'analisi, dal momento che, come già sottolineato, essi vengono introdotti nell'esperimento con l'unico scopo di analizzare in che modo essi possano influenzare gli altri fattori, quelli di interesse. Si è quindi interessati esclusivamente alla stima della loro interazione con questi ultimi; siamo dunque nel caso in cui le *whole-units* contengono i fattori ambientali e le *sub-units* quelli del disegno.

Si supponga di avere m livelli per i fattori ambientali, indicati con $E_1, \dots, E_j, \dots, E_m$, applicati alle *whole-units*, nelle quali compaiono gli n livelli dei fattori del disegno, indicati con $D_1, \dots, D_i, \dots, D_n$,

¹² Si veda, per ulteriori dettagli, Cochran e Cox (1957), Steel e Torrie (1980).

assegnati alle *sub-units*, ipotizziamo, inoltre, di avere l repliche, $r_1, \dots, r_k, \dots, r_l$, in corrispondenza di ciascuna *whole-unit*.

Va sottolineato che con E indichiamo l'insieme dei fattori ambientali, e non il singolo fattore ambientale, e con D l'insieme dei fattori di processo.

In tale contesto il modello proposto per la variabile risposta è il seguente:

$$y_{ijk} = \mu + r_k + E_j + \eta_{jk} + D_i + (DE)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (3.1)$$

in cui y_{ijk} è l'osservazione sperimentale registrata in corrispondenza della k -esima replicazione della combinazione dell' i -esimo livello dell'insieme dei fattori D con il j -esimo livello di quello dei fattori E , μ sta ad indicare la media generale, r_k rappresenta invece l'effetto casuale, associato alla k -esima replicazione, per il quale si ipotizza distribuzione normale con media nulla e varianza costante pari a σ^2_R ; E_j indica l'effetto fisso del j -esimo livello dei fattori E e D_i quello dell' i -esimo livello del gruppo D , la componente $(DE)_{ij}$ sintetizza invece l'insieme delle interazioni tra l' i -esimo livello dei fattori D e il j -esimo dei fattori E . Infine, η_{jk} rappresenta la componente erratica associata alle *whole-units*, detta *whole-plot error*, distribuita normalmente con media nulla e varianza pari a σ^2_w , mentre ε_{ijk} , che indica l'errore relativo alle *sub-units*, o *sub-plot error*, ha distribuzione normale con media nulla e varianza σ^2_s ; si ipotizza che le due componenti erratiche siano indipendenti.

Nella tabella 3.1 viene illustrata la scomposizione delle fonti di variabilità (ANOVA) utilizzata in tale contesto.

Fig.:3.1 Prospetto di Analisi della Varianza per la struttura (a)

	fonte	g.d.l.	Somma dei quadrati	Somma attesa dei quadrati
w s	Rep.(R)	$l - 1$		$m n \sigma^2_r + \sigma^2_s + n \sigma^2_w$
	Fatt.amb.(E)	$m - 1$	$nl \sum_{j=1}^m \hat{E}_j^2$	$\frac{nl}{m-1} \sum_{j=1}^m E_j^2 + \sigma^2_s + n \sigma^2_w$
	RxE	$(l-1)(m-1)$		$\sigma^2_s + n \sigma^2_w$
	Fatt.dis.(D)	$n - 1$	$ml \sum_{i=1}^n \hat{D}_i^2$	$\frac{lm}{n-1} \sum_{i=1}^n D_i^2 + \sigma^2_s$
	DxE	$(n-1)(m-1)$	$l \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\hat{DE})_{ij}^2$	$\frac{l}{(n-1)(m-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (DE)_{ij}^2 + \sigma^2_s$
	errore	$(l-1)m(n-1)$		σ^2_s

Nella tabella i simboli $\hat{D}_i$, $\hat{E}_j$ e $(\hat{DE})_{ij}$ stanno ad indicare le stime, rispettivamente di, D_i , E_j e $(DE)_{ij}$. Pianificando un disegno come quello appena illustrato, si nota immediatamente che la componente di variabilità è suddivisa in due parti, quella relativa alle *whole-units*, (E e RxE), e l'altra associata alle *sub-units* (D , DxE e l'errore); in tal caso la significatività dei fattori appartenenti

al gruppo E, ovvero i fattori ambientali, verrà verificata sulla somma dei quadrati relativa all'interazione RxE , mentre la significatività dei fattori di processo, indicati con D , e delle interazioni DxE , lo sarà sulla componente di errore residuo.

Supponiamo ora, invece, di non possedere alcuna replicazione, in questo caso, per riuscire a verificare la significatività degli effetti ambientali, di disegno e la loro interazione DxE , risulta essenziale poter stimare σ_s^2 e $\sigma_s^2 + n\sigma_w^2$. Una possibilità per riuscire a valutare la significatività degli effetti dei fattori considerati senza possedere le stime delle due suddette componenti è quella di costruire due *normal-probability plots*, uno per gli effetti dei *whole-factors*, e uno per quelli dei *sub-factors*.

In alternativa, se l'assegnazione dei fattori del disegno e dei fattori ambientali avviene secondo un disegno fattoriale, allora le interazioni di ordini elevati in alcuni casi possono essere tranquillamente ipotizzate trascurabili. Se tale assunzione risulta ragionevole, allora si può stimare la componente di *whole-plot error* attraverso la tecnica del *pooling* (Berni, 1999), la quale consiste nel conglobare nella componente erratica, indicata col termine *pooled-error*, gli effetti che in una prima fase dell'analisi spiegano una percentuale di variabilità complessiva minore del 5%; in tal caso il *pooled-error* deriva dalla fusione delle fonti di variabilità imputabili alle interazioni di ordine elevato e ai fattori ambientali. Analogamente, per ottenere una stima del *sub-plot error*, si aggrega la variabilità delle interazioni di ordine elevato a quella dei fattori del disegno, e quella dei fattori del disegno a quella dei fattori ambientali.

Per illustrare quanto appena proposto rispetto alla teoria della prima struttura sperimentale del disegno *split-plot*, riprendiamo l'esempio proposto da Box e Jones (1992).

L'utilizzo di tale struttura del disegno *split-plot*, per l'esperimento suddetto, si traduce nelle seguenti fasi:

- Inizialmente si assegnano i livelli dei *sub-factors* alle *sub-units*. Ricordiamo che in questa tipologia di disegno i *sub-factors* corrispondono ai fattori di disegno, mentre i *whole-factors* a quelli ambientali. Questo primo passo conduce alla creazione di un piano fattoriale 2^3 , per ciascuna *whole-units*, dal momento che i fattori di disegno considerati sono tre: farina, uova e dimensione biscotti, tutti a due livelli;
- le *whole-units* vengono individuate assegnando le combinazioni sperimentali relative ai fattori ambientali, ovvero costruendo un piano fattoriale 2^2 che coinvolga i due fattori ambientali analizzati, tempo e temperatura, entrambi a due livelli;
- l'esperimento prevede, dunque, l'individuazione di 4 *whole-units*, ciascuna composta da 8 *sub-units*, per un totale di $8 \times 4 = 32$ combinazioni possibili, ovvero 32 lotti di biscotti, che saranno successivamente cotti in quattro diverse infornate, corrispondenti alle 4

combinazioni dei livelli dei fattori ambientali, in ognuna delle quali andranno otto diversi lotti, in base alle diverse combinazioni relative ai fattori di disegno.

Le quattro diverse infornate rappresentano le quattro combinazioni dei livelli dei fattori tempo e temperatura di cottura, e gli otto lotti di dolci rappresentano le otto combinazioni dei livelli di uova, farina e dimensione dei biscotti. Per il dettaglio dei risultati analitici si veda Box e Jones (1992).

3.2 Struttura sperimentale (b): fattori ambientali considerati come *split-plot factors*

La seconda struttura ipotizzata prevede che i fattori di classificazione corrispondano ai fattori di disegno. Pertanto si analizza il caso in cui le *whole-units* contengono i fattori di disegno (D), le *sub-units* i fattori ambientali (E). Come per il disegno illustrato nel paragrafo precedente, si considera la medesima notazione generale, in cui i fattori ambientali variano tra m livelli, indicati con $E_1, E_2, \dots, E_m$, mentre i fattori di disegno variano tra n livelli, indicati con $D_1, D_2, \dots, D_n$, con la presenza di R repliche, $r_1, r_2, \dots, r_l$. La principale differenza, rispetto al modello utilizzato nella prima variante, è dovuta al fatto che in questo adattamento i fattori ambientali vengono applicati alle *sub-units* e non alle *whole-units*. Il modello utilizzato per la variabile risposta è il seguente:

$$y_{ijk} = \mu + r_k + D_i + \theta_{ik} + E_j + (DE)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (3.2)$$

in cui, come in formula (3.1), y_{ijk} indica l'osservazione rilevata in corrispondenza della k -esima replicazione della combinazione dell' i -esimo livello dei fattori D e del j -esimo dei fattori E , μ è la media generale, r_k rappresenta l'effetto casuale dovuto alla k -esima replicazione, E_j e D_i indicano invece, rispettivamente, gli effetti principali dell' i -esimo e del j -esimo livello dei gruppi di fattori D ed E , $(DE)_{ij}$ è la componente generica delle interazioni tra D ed E ; ε_{ijk} e θ_{ik} rappresentano, rispettivamente, le componenti erratiche associate alle *sub-units* ed alle *whole-units*.

La figura 3.2 illustra la scomposizione delle fonti di variabilità in questo contesto.

Riprendiamo brevemente, anche in questo caso a titolo esemplificativo, l'esempio dei biscotti, proposto da Box e Jones (1992). In questo esperimento, vengono individuati otto *whole-plots*, in seguito alla costruzione di un piano fattoriale 2^3 , ognuno dei quali contiene quattro *sub-units*, ottenute applicando le 2^2 combinazioni sperimentali relative ai fattori ambientali. In totale avremo, quindi, otto lotti di biscotti, ciascuno dei quali è suddiviso in quattro sub-lotti, per un totale di 32 partite di dolci; ogni partita di dolce viene infornata separatamente in particolari condizioni di temperatura e tempo.

Riassumendo, la conduzione di questo esperimento richiede $n \times l$ lotti di biscotti e $m \times n \times l$ infornate, ovvero, in questo caso, 8 lotti di dolci e 32 infornate.

Si supponga, come per i casi precedentemente illustrati, che i fattori ambientali, in questo caso coincidenti con i *sub-factors*, siano a m livelli, indicati con $E_1, E_2, \dots, E_m$, mentre quelli di disegno, ovvero i *whole-factors*, siano a n livelli: $D_1, D_2, \dots, D_n$; supponiamo inoltre di effettuare R repliche, indicate con $r_1, r_2, \dots, r_l$. Il modello utilizzato per questa tipologia di disegno è il seguente:

$$y_{ijk} = \mu + r_k + E_j + \eta_{jk} + \theta_{ik} + D_i + (DE)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \quad (3.3)$$

per il quale valgono esattamente le medesime assunzioni fatte per le altre due strutture precedenti. Ovvero y_{ijk} rappresenta la k -esima replicazione delle combinazione sperimentale relativa al livello i -esimo dei fattori del gruppo D e quello j -esimo di quelli dell'insieme E , μ è la media generale, r_k l'effetto casuale associato alla k -esima replicazione¹³, E_j e D_i , rappresentano gli effetti fissi dei rispettivi gruppi di fattori, ed infine $(DE)_{ij}$ indica la componente generica d'interazione tra il livello i -esimo di D e quello j -esimo di E ; in questo adattamento la componente η_{jk} ha distribuzione normale con media nulla e varianza pari a σ^2_E , θ_{ik} ha la stessa distribuzione con l'unica differenza che la varianza è pari a σ^2_D , ed infine anche ε_{ijk} ha distribuzione normale con media nulla e varianza σ^2 ; le tre suddette componenti sono supposte indipendenti.

Nella tabella (fig. 3.4) si illustra l'analisi della varianza utilizzata per questa struttura.

La tabella mostra che la varianza complessiva del disegno può essere suddivisa in tre componenti. La devianza relativa ai fattori ambientali viene verificata sulla componente d'interazione RxE , la devianza relativa ai fattori di disegno viene verificata sulla componente RxD , ed infine, le componenti d'interazione del primo ordine tra fattori ambientali e fattori di disegno vengono valutate rispetto le componenti d'interazione del secondo ordine $RxExD$.

Quando nel disegno non ci sono repliche, per verificare la significatività degli effetti dei fattori considerati si possono seguire due strade: si può optare per la costruzione di tre *normal-probability plots*, uno per i fattori di disegno, uno per quelli ambientali e un terzo per le interazioni tra fattori ambientali e fattori di disegno, oppure si può scegliere di stimare la componente $(\sigma^2 + n\sigma^2_E)$ aggregando¹⁴ la variabilità associata alle interazioni di ordine elevato tra i fattori ambientali, ovvero stimare $(\sigma^2 + m\sigma^2_D)$ aggregando le interazioni di ordine elevato tra i fattori di disegno, ed infine, la componente σ^2 può essere stimata aggregando la variabilità relativa alle interazioni di ordine elevato tra fattori ambientali e fattori di disegno.

¹³ Tale effetto, come sottolineato nei paragrafi 3.1 e 3.2, ha distribuzione normale con media nulla e varianza pari a: σ^2_R .

¹⁴ Si ricorda che la procedura adottata fa riferimento alla tecnica del *pooling* illustrata brevemente nel paragrafo 3.1.

Fig.:3.4 Prospetto di Analisi della Varianza per la struttura (c)

	fonte	g.d.l.	Somma dei quadrati	Somma dei quadrati attesa
w	rep.(R)	$l - 1$		$mn\sigma_r^2 + \sigma^2 + m\sigma_D^2 + n\sigma_E^2$
	fatt.ambient.(E)	$m - 1$	$nr \sum_{j=1}^m \hat{D}_j^2$	$\frac{mr}{n-1} \sum_{i=1}^n E_j^2 + \sigma^2 + n\sigma_E^2$
	RxE	$(l-1)(m-1)$		$\Sigma^2 + n\sigma_E^2$
s	fatt.disegno(D)	$n - 1$	$nr \sum_{i=1}^n \hat{E}_i^2$	$\frac{rn}{m-1} \sum_{j=1}^m D_i^2 + \sigma^2 + m\sigma_D^2$
	RxD	$(l-1)(n-1)$	$r \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (DE)^2_{ij}$	$\frac{r}{(n-1)(m-1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (DE)^2_{ij} + \sigma^2_s$
	ExD	$(m-1)(n-1)$		
	RxExD	$(l-1)(m-1)(n-1)$		σ^2

Riprendendo l'esempio dei biscotti, utilizzare questo tipo di adattamento prevede soltanto l'esecuzione di $n \times l$ partite di biscotti e l'esecuzione di $m \times l$ operazioni d'infornata. Nel caso considerato la pianificazione di un disegno *strip-block* comporta la creazione di soli 8 lotti di biscotti e 4 infornate. Infatti si procede, come nella situazione (b), a suddividere le 8 partite di dolci in 4 parti, ma in questo caso si seleziona casualmente un quarto da ogni partita e gli 8 quarti selezionati sono infornati nelle medesime condizioni di temperatura e tempo. Lo stesso esperimento, condotto secondo un disegno completamente randomizzato, sempre in assenza di replicazioni, avrebbe necessitato, non soltanto di 32 partite di biscotti, ma anche di 32 infornate. Si ricorda che la prima struttura sperimentale avrebbe comportato la creazione di 32 lotti di biscotti e di 4 operazioni d'infornata, mentre la seconda struttura 8 lotti e 32 infornate. Quanto appena detto dimostra che il disegno *strip-block* è, economicamente e materialmente, più facile da condurre, sia rispetto a disegni completamente randomizzati, sia agli altri due adattamenti dello *split-plot* proposti nei paragrafi precedenti.

3.4 Strutture sperimentali ed efficienza

In questo breve paragrafo si sintetizzano i guadagni in efficienza del disegno che si ottengono con le tre strutture sperimentali descritte in precedenza (paragrafi 3.1, 3.2, 3.3) rispetto al disegno completamente randomizzato (CR) e al disegno a blocchi randomizzati completi (BRC).

Analizzando l'efficienza della struttura sperimentale (c) rispetto ad un disegno completamente randomizzato (CR), si deve osservare che la stima della varianza per un disegno CR è una media ponderata delle due componenti erratiche dello *split-plot* qui considerato. La ponderazione è effettuata tramite i gradi di libertà corrispondenti. Pertanto, la precisione delle stime ottenute tramite il disegno CR è inferiore alla precisione ottenuta all'interno dei *sub-plots*, mentre il disegno CR risulta più preciso rispetto alle stime che otteniamo per i fattori collocati entro gli *whole-plots*.

Discorso analogo può farsi per il confronto tra la struttura sperimentale (b), illustrata nel paragrafo 3.2, e un disegno a blocchi randomizzati completi. Anche in questo caso, le stime ottenute con il disegno BRC risultano migliori di quelle ottenute per i fattori entro gli *whole-plots*. In questo caso però, lo *split-plot* consente un guadagno in modalità di esecuzione del disegno.

Confrontando la struttura sperimentale (c), struttura a *strips-block*, con le altre due situazioni sperimentali (a) e (b), si devono sottolineare i seguenti risultati. Il guadagno in precisione è nullo rispetto alla situazione sperimentale (a) (par.3.1); al tempo stesso, si ha un guadagno in precisione per le stime delle interazioni tra fattori ambientali e fattori di disegno, che risultano di particolare interesse nell'ambito del *Robust-Design*. L'errore di stima per gli effetti principali dei fattori di disegno risulta invece maggiore che nella struttura (a). Lo stesso dicasi per il confronto tra *strips-block* e struttura sperimentale (b).

Nel caso di confronto con il disegno a blocchi randomizzati completi, la perdita di efficienza si ha, non solo per le stime degli effetti principali all'interno degli *whole-plots*, ma anche per i fattori inseriti nei *sub-plots*.

Pertanto la struttura *strips-block* risulta di particolare interesse al momento della stima delle interazioni $D \times E$, mentre la struttura sperimentale (a) è la migliore sotto il profilo di efficienza generale e di conduzione dell'esperimento.

3.5 Varianti del disegno *split-plot*

Molti autori¹⁵ hanno proposto alcune varianti che possono essere utilizzate tenendo conto delle diverse caratteristiche dell'esperimento.

Mentre nei paragrafi precedenti abbiamo analizzato i diversi adattamenti del disegno *split-plot* proposti relativamente alle diverse possibilità di assegnazione dei fattori di disegno, o di quelli ambientali, in questa sede si illustrano tre tipi di *split-plot*, proposti in letteratura, che si differenziano per l'utilizzo di tecniche diverse nell'assegnazione dei trattamenti alle unità sperimentali.

¹⁵ Tra cui citiamo: Kempthorne (1952); Cochran e Cox (1957).

3.5.1 Assegnazione sistematica dei trattamenti relativi ai *whole-factors*

Questa variante del disegno *split-plot*, che prevede l'assegnazione sistematica dei livelli dei *whole-factors* alle unità sperimentali, viene utilizzata nei casi in cui la natura stessa dell'esperimento renda necessario un tale tipo di associazione. I casi più comuni per i quali è stato riscontrato, negli anni, l'uso di questa variante dello *split-plot* sono stati gli esperimenti in cui A trattamenti rappresentano differenti varietà di frumento¹⁶, la cui maturazione viene prevista in date diverse, e B trattamenti sono invece, particolari lavorazioni applicate ai semi prima della semina. Dal momento in cui ciascuna varietà di frumento, una volta cresciuta, viene poi raccolta, tutte le operazioni relative alla semina, crescita e raccolta vengono rese molto più semplici piantando i semi corrispondenti a ciascuna varietà di frumento nello stesso ordine con cui esse risulteranno pronte per la raccolta; questo particolare tipo di assegnazione dei trattamenti alle unità viene appunto definita come assegnazione in ordine sistematico.

Facendo riferimento a Box e Jones (1992), gli autori illustrano un'altra particolare situazione in cui questa variante dello *split-plot* trova ampia applicabilità. Si fa riferimento ad esperimenti in cui come *whole-factor* viene considerata la temperatura di cottura presente in un forno, che naturalmente viene misurata a differenti livelli, mentre i *sub-factors* rappresentano due differenti composizioni di metallo, che dovranno essere surriscaldate a determinate temperature. Dal momento in cui risulta estremamente difficile assegnare in modo randomizzato i livelli della temperatura di cottura al forno, per rendere più semplice la conduzione dell'esperimento si rende necessaria l'applicazione di temperature crescenti (ai metalli considerati).

Riportiamo qui di seguito (fig.3.5) la struttura dell'esperimento appena descritto.

Nella tabella, T_1 rappresenta il livello della temperatura più basso, e T_4 quello più alto, quattro sono i livelli complessivi; nell'esperimento vengono presi in considerazione solo due diverse composizioni di metallo, rappresentate da s_0 e s_1 .

Fig.:3.5 Esempio di variante *split-plot*

blocco 1				blocco 2			
T_1	T_2	T_3	T_4	T_1	T_2	T_3	T_4
s_1	s_0	s_1	s_0	s_1	s_0	s_0	s_1
s_0	s_1	s_0	s_1	s_0	s_1	s_1	s_0

¹⁶ Per ulteriori approfondimenti relativi a questo tipo di esperimento si veda Cochran e Cox (1957).

L'assegnazione delle *sub-units* viene effettuata applicando la randomizzazione all'interno di ciascuna *whole-unit*. L'assegnazione dei livelli del *whole-factor*, ovvero della temperatura, non avviene in modo randomizzato, essi infatti vengono fatti variare in modo crescente, si parte dunque da T_1 per arrivare, come mostrato in tabella, a T_4 .

La conduzione di un tale tipo di disegno non consente di stimare, però, la componente erratica relativa ai *whole-factors*; per questo motivo questa scelta risulta opportuna soltanto nei casi in cui non venga richiesta la verifica degli effetti dei *whole-factors* sulla variabile risposta, ed inoltre, solo quando la natura stessa dell'esperimento impone l'assegnazione sistematica dei trattamenti.

3.5.2 Split-plot e disegno a Quadrato Latino

La disposizione delle unità dello *split-plot* può seguire anche lo schema di un disegno a Quadrato Latino; in questa direzione Cochran e Cox (1957) descrivono ampiamente questa relazione.

L'utilizzazione del disegno a Quadrato Latino per le unità dello *split-plot* permette il raggiungimento di una migliore accuratezza, data la possibile valutazione dell'effetto del fattore posto in riga e dell'effetto del fattore posto in colonna.

Una prima condizione perché il disegno *split-plot* sia disposto secondo un disegno a Quadrato Latino è che il numero delle replicazioni sia uguale al numero dei trattamenti.

In particolare, il legame tra i due disegni può essere ravvisato nelle due seguenti situazioni:

- 1) classificazione delle sub-unità dello *split-plot* secondo un disegno a Quadrato Latino; due sono le caratterizzazioni di questa particolare configurazione. Entrambe sono di interesse ma una sembra essere particolarmente legata alle specifiche richieste del disegno sperimentale nel controllo di qualità, secondo quanto specificato in precedenza riferendosi a Box e Jones (1992);
- 2) classificazione delle sub-unità in strisce (*strips*); anche in questo caso l'interesse è dato da un possibile collegamento con gli esperimenti denominati *strip-blocks* descritti in precedenza.

In entrambi i casi suddetti lo scopo è quello di aumentare l'accuratezza nel confronto tra le sub-unità.

Si consideri in generale un disegno con due fattori A e B , in cui A ha k livelli e B ha p livelli.

Nel primo caso, per ogni livello di A , quindi per ogni unità di trattamento, si ha la disposizione delle sub-unità in uno o più disegni a Quadrato Latino. Le righe del disegno a Quadrato Latino sottostante sono formate dalle posizioni delle sub-unità entro ciascun livello di A (k livelli). Le differenze tra le righe del disegno a Quadrato Latino (effetto riga) sono quindi, in questo caso, le differenze tra le sub-unità entro uno stesso livello di A .

Una condizione necessaria, derivante dalla struttura a Quadrato Latino, è che il numero p dei livelli di B deve essere uguale, o un multiplo, al numero delle r replicazioni.

Un'altra osservazione riguarda la valutazione dell'effetto di A , che non risulta influenzato dalla struttura delle sub-unità. Poiché la varianza di A non è influenzata da questa particolare disposizione delle sub-unità, la struttura dei gradi di libertà viene a modificarsi solo per il fattore B . In generale, se $r=hp$, dove h è il fattore moltiplicativo tra le replicazioni ed il numero dei livelli di B , si ha la seguente suddivisione in gradi di libertà (fig.3.6).

Fig.: 3.6 Suddivisione delle fonti di variabilità e rispettivi gradi di libertà

Fonte di variabilità	Gradi di libertà
Effetto fattore Riga	$hk(p-1)$
Effetto Sub-unità	$(p-1)$
Interazione AB	$(k-1)(p-1)$
errore (B)	$k(p-1)(r-1-h)$
Totale	$rk(p-1)$

I gradi di libertà per il fattore di riga sono dati da: $(p-1)$ gradi di libertà per ogni disegno a Quadrato Latino; ogni livello di A contribuisce con $h(p-1)$ gradi di libertà ; dato che i livelli sono di A sono k , il totale risulta: $hk(p-1)$. Si deve osservare che la suddivisione in gradi di libertà non rispecchia in maniera evidente la struttura a Quadrato Latino sottostante. Questa struttura si riflette soltanto nell'effetto del fattore di riga.

Per una migliore comprensione, si consideri un esperimento in cui si hanno quattro differenti situazioni di cottura (in forno), indicate con B_1, B_2, B_3 e B_4 , e tre ricette per preparare un dolce: c_0, c_1 e c_2 , sulle quali si vogliono verificare determinati effetti¹⁷. Supponiamo di condurre l'esperimento sulla base di un disegno *split-plot* in cui la condizione di cottura rappresenta il fattore di classificazione, o *whole-factor*, mentre il tipo di ricetta è il *sub-factor*. Il dolce preparato può essere posizionato all'interno del forno in tre diversi modi: in cima, a metà o in fondo al forno; per valutare l'effetto della posizione nel forno risulta vantaggioso condurre l'esperimento in modo tale che ogni possibile combinazione sperimentale, relativa al *whole-factor* e al *sub-factor*, venga assegnata secondo un disegno a Quadrato Latino 3x3.

Nella seguente figura si riporta la struttura di tale disegno (fig.:3.7).

¹⁷ L'esperimento di cui parliamo viene presentato da Box e Jones (1992).

Fig.:3.7 Esempio di *split-plot* e Quadrato Latino

	blocco 1				blocco 2				blocco 3			
liv.forno	B ₃	B ₂	B ₁	B ₄	B ₄	B ₂	B ₁	B ₃	B ₃	B ₄	B ₂	B ₁
Alto	c ₂	c ₁	c ₀	c ₁	c ₀	c ₀	c ₁	c ₁	c ₀	c ₂	c ₂	c ₂
Medio	c ₀	c ₀	c ₁	c ₀	c ₂	c ₂	c ₂	c ₂	c ₁	c ₁	c ₁	c ₀
Basso	c ₁	c ₂	c ₂	c ₂	c ₁	c ₁	c ₀	c ₀	c ₂	c ₀	c ₀	c ₁

Analizzando il disegno a Quadrato Latino appena illustrato si nota che, in corrispondenza di ogni condizione di cottura, $B_1 \dots B_4$, ogni ricetta compare una sola volta per ciascuna delle tre posizioni del forno considerate: alta, media e bassa; si nota inoltre facilmente che, considerando separatamente ciascuna condizione di cottura in forno, $B_1, \dots, B_4$, otteniamo quattro disegni a Quadrato Latino; considerando, per esempio, B_3 e B_4 , otteniamo i seguenti disegni (fig.: 3.8), in cui compaiono i differenti livelli del fattore “posizione nel forno” e “ricetta”.

Fig.:3.8 Esempio di Quadrato Latino da *split-plot*

Alto	c ₂	c ₁	c ₀
Medio	c ₀	c ₂	c ₁
Basso	c ₁	c ₀	c ₂

Alto	c ₁	c ₀	c ₂
Medio	c ₀	c ₂	c ₁
Basso	c ₂	c ₁	c ₀

Il secondo tipo di *split-plot* con sub-unità disposte secondo un disegno a Quadrato Latino è un particolare piano appartenente alla classe dei disegni Quasi a Quadrato Latino; Quasi perché i trattamenti non appaiono una sola volta in ogni riga ed in ogni colonna. Questo particolare piano è detto: *Half Plaid Latin Square* o disegno a Quadrato Latino HP. Tale disegno è caratterizzato dal fatto che un fattore, A , è applicato alle intere righe o alle intere colonne del disegno a Quadrato Latino, come una coperta. Questo disegno si presenta utile quando il fattore A non può essere valutato sulle unità individuali, o non è necessario.

Consideriamo per esempio un disegno a Quadrato Latino con due fattori B e C , ciascuno a 2 livelli ($p=k=2$). Il disegno a Quadrato Latino ha dimensione 4×4 e rappresenta un disegno fattoriale 2×2^2 . Il fattore A , con due livelli: a_1 e a_2 , viene quindi applicato sulle righe del disegno. Sulle prime due righe verrà verificato il livello a_1 , sulle seconde due righe il livello a_2 .

L'osservazione principale per il disegno a Quadrato Latino HP risiede nel fatto che l'interesse nei confronti di A deve riguardare soltanto la sua interazione con B e C . Infatti per l'effetto principale di A si verifica l'effetto *confounding*: la “tra A ” si confonde con la “tra blocchi”; questo fatto diversifica l'HP dai disegni Quasi a Quadrato Latino, in cui tale situazione si verifica solo per le

interazioni, mentre lo inserisce tra i disegni *split-plot*, in cui si ha questa situazione di confondimento anche per gli effetti principali, come abbiamo già notato.

A conferma del fatto che l'HP può essere visto come uno *split-plot*, basti pensare alle unità come alle righe su cui sono verificati i livelli di A , mentre le sub-unità sono le caselle ottenute dalla combinazione di riga e colonna. Anche per l'HP si hanno più componenti di errore, in questo caso due: una relativa alla sovra-imposizione di A , l'altra per il disegno a Quadrato Latino.

La suddivisione dei gradi di libertà tiene conto degli h Quadrati Latini che devono essere costruiti. Inoltre, l'effetto principale di A e la relativa componente di errore casuale costituiscono una analisi sottostante la struttura di riga.

L'osservazione di Box (Nair,1992) relativa alla utilizzazione dello *split-plot* sembra essere indirizzata al disegno HP. Riferendosi infatti ad un disegno sperimentale utilizzato da Michaels (1964), Box cita l'osservazione di questo autore che prevede la possibilità di catturare l'interazione tra i fattori ambientali e i fattori più strettamente legati alla produzione del prodotto; mentre non sono di interesse gli effetti principali dei fattori ambientali. Inoltre, e in questo punto sembrerebbe riferirsi all'HP, i fattori ambientali sono sovrapposti al disegno sottostante (*Main Plots*) e non sono stimati così precisamente come i fattori legati al processo produttivo (fattori di controllo o interni) e le interazioni corrispondenti.

L'interesse nel costruire un disegno sperimentale in cui possa essere individuata l'interazione tra fattori ambientali (rumore) e fattori controllo è già stata sottolineata. Possiamo infatti perseguire l'individuazione della interazione tra controllo e rumore per una soluzione robusta alle variazioni accidentali. In alcuni casi i trattamenti relativi ai *sub-factors* vengono assegnati secondo la struttura di un disegno a Quadrato Latino con lo scopo principale di riuscire, in un secondo momento, ad aumentare la precisione delle stime degli effetti dei *sub-factors*.

3.5.3 Confondimento all'interno dello *split-plot*

In alcuni casi, come sostenuto da Yates e Bartlett (1935), in un disegno *split-plot* in cui i trattamenti vengono assegnati secondo un disegno fattoriale, si verifica il confondimento tra le interazioni di ordine elevato. In un disegno sperimentale di questo tipo può risultare sufficiente un numero ridotto di *sub-units* per ciascuna *whole-unit*, purché sia comunque possibile stimare tutti gli effetti d'interesse.

Nei casi in cui le *whole-units* siano disposte secondo un disegno fattoriale, può risultare vantaggioso ridurre il numero delle *whole-units* presenti nel disegno confondendo determinate interazioni relative ad esse¹⁸.

Box e Jones (1992), ripropongono, a titolo illustrativo, l'esempio relativo al disegno dell'esperimento condotto su un preparato per dolci in cui vengono considerati due fattori ambientali: il tempo di cottura (*t*), e la temperatura di cottura (*T*), e quattro fattori di disegno: la farina (*F*), le uova (*E*), i coloranti (*C*) e il burro (*S*); tutti i fattori considerati, sia quelli di disegno che quelli ambientali, variano a due livelli.

Si supponga di considerare come *sub-factors* i fattori di disegno, come *whole-factors* i fattori ambientali, ed inoltre si ipotizza che in ogni infornata non possano essere messi più di otto lotti di dolce alla volta. In questo caso risulta impossibile utilizzare un disegno fattoriale completo per i fattori di disegno all'interno di ciascuna *whole-unit*, in quanto ciò richiederebbe l'infornata di 16 dolci per volta. In alternativa possiamo utilizzare un disegno fattoriale frazionale, con frazione $\frac{1}{2}$, per i fattori del disegno da assegnare all'interno di ciascuna *whole-unit*.

Nella seguente tabella (fig.3.9) viene riportato un esempio di tale disegno, in cui **I** rappresenta il *defining-contrast*.

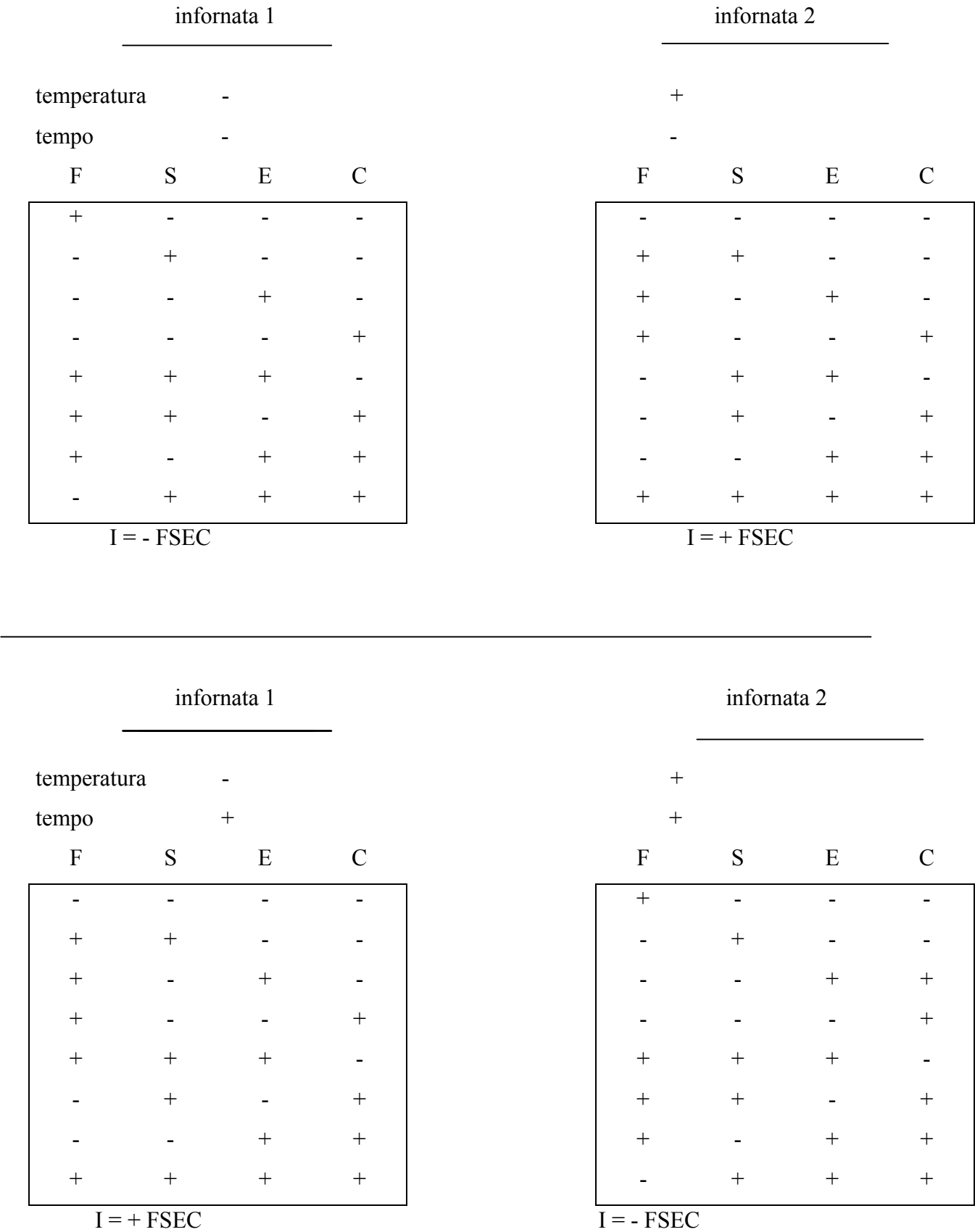
Nel disegno l'interazione *FSEC* è confusa con l'interazione tra i fattori ambientali, o *whole-factors*; assumendo che tutte le interazioni del terzo ordine e di ordini più alti siano trascurabili, questo disegno permette di stimare gli effetti dei fattori di disegno e delle interazioni tra due fattori, così come le interazioni tra fattori di disegno e fattori ambientali.

Se fosse stato possibile, per l'esempio citato, costruire un fattoriale completo per i fattori di disegno, all'interno di ciascuna *whole-unit*, sarebbero risultati necessari 64 lotti di dolce e 4 infornate; utilizzando il fattoriale frazionale, proposto da Box e Jones (1992), e da noi ripreso, risultano necessarie soltanto 32 partite di dolce e 4 infornate. Da quanto appena affermato risulta evidente che la variante del disegno *split-plot* in cui viene utilizzata la tecnica del confondimento contribuisce notevolmente alla riduzione delle prove da effettuare in un determinato esperimento, con un conseguente risparmio di tempo e risorse economiche.

Esperimenti in cui vengono confusi gli effetti, (relativi ai *whole-factors*, ai *sub-factors*, o ad entrambi), sono consigliabili e particolarmente appropriati in contesti industriali in cui è necessario valutare la significatività di un elevato numero di fattori, sia di disegno che ambientali. In queste situazioni, infatti, risulta impossibile utilizzare un disegno fattoriale completo per i trattamenti relativi sia ai *whole-factors* che ai *sub-factors*, proprio per l'eccessivo numero di prove che essi richiederebbero.

¹⁸ La tecnica del confondimento, all'interno del disegno *split-plot*, con la quale interazioni tra fattori di disegno vengono confuse con gli effetti dei *whole-factors* viene ampiamente discussa da Addelman (1964) e Daniel (1976).

Fig.:3.9 Split-plot e fattoriale frazionale



Come si è detto più volte, la particolare struttura del disegno analizzato in questo lavoro permette di pianificare considerando i problemi generali della programmazione sperimentale, in merito alla conduzione dell'esperimento e alla randomizzazione effettuata secondo le già descritte regole, ma, al tempo stesso, si ha anche la possibilità di articolare la gestione dei fattori coinvolti nel disegno secondo i criteri di robust-design, illustrati nel secondo capitolo.

3.6 Un confronto tra disegno *split-plot* e il disegno a blocchi randomizzati completi

In questo paragrafo viene illustrato il confronto tra il disegno *split-plot* ed un disegno a blocchi randomizzati completi (BRC), sottolineando quali sono i vantaggi e gli svantaggi dell'uno e dell'altro, ed in quali situazioni lo *split-plot* è preferibile al BRC, o viceversa.

Si consideri una situazione del tipo quella mostrata nella tabella seguente (fig.3.10):

Fig.:3.10 Split-plot e BRC

Blocco 1					Blocco 2					Blocco 3				
a_3	a_1	a_2	a_0	a_4	a_1	a_4	a_0	a_2	a_3	a_1	a_3	a_0	a_2	a_4
b_0	b_1	b_0	b_0	b_0	b_1	b_1	b_0	b_0	b_0	b_1	b_0	b_0	b_0	b_1
b_1	b_0	b_1	b_1	b_1	b_0	b_0	b_1	b_1	b_1	b_0	b_1	b_1	b_1	b_0

Ovvero una situazione in cui si hanno due fattori, A e B , il primo a 5 livelli, indicati con a_0, a_1, a_2, a_3 e a_4 , e il secondo a due livelli: b_0 e b_1 ; il fattore A viene assegnato alle *whole-units*, il fattore B alle *sub-units*.

Questo esperimento può essere condotto seguendo due strade; si può infatti scegliere tra l'utilizzo del disegno a blocchi randomizzati completi, in cui compaiono tre blocchi di dieci trattamenti ciascuno, o l'utilizzo del disegno *split-plot* in cui sono presenti cinque *whole-units*, ciascuna delle quali è composta da due *sub-units*.

Mettendo a confronto questi due tipi di disegno emergono delle differenze importanti:

- 1) Utilizzando lo *split-plot*, generalmente gli effetti del fattore B e dell'interazione $A \times B$ vengono stimati con più precisione rispetto a quelli del fattore A ; inoltre, il numero dei gradi di libertà a disposizione per la stima della componente erratica è minore per i confronti relativi alle *whole-units* rispetto a quelli disponibili per le *sub-units*.
- 2) Va sottolineato che l'errore sperimentale medio, relativo a tutti i trattamenti assegnati nel disegno, è il medesimo per entrambi i disegni, da ciò segue che utilizzando lo *split-plot* non

si ottiene alcun aumento in precisione delle stime; la maggior precisione registrata per gli effetti di B ed AxB , nello *split-plot*, la si ottiene a scapito di quella per gli effetti di A .

- 3) Per quanto riguarda i test di significatività degli effetti dei fattori e la costruzione degli intervalli di confidenza per le stime, risulta vantaggioso l'utilizzo del disegno a blocchi randomizzati completi, il quale consente di avere a disposizione più gradi di libertà per la stima della singola componente di variabilità di errore presente nel disegno.
- 4) Come sottolineato da più autori¹⁹, il principale vantaggio dell'utilizzo del disegno *split-plot* risiede nel fatto che esso permette di considerare nello stesso esperimento, contemporaneamente, sia fattori che per essere verificati richiedono l'utilizzo di grandi quantitativi di materiale, sia fattori per i quali invece sono sufficienti quantitativi minori; se l'esperimento viene pianificato con lo scopo di valutare la significatività dei primi, e quindi risultano necessari comunque elevate quantità di materiale, gli altri fattori possono essere introdotti nell'esperimento a costi relativamente bassi, e ciò può favorire l'acquisizione di ulteriori informazioni relative all'analisi senza alterarne i costi.

Riassumendo, l'utilizzo del disegno *split-plot* risulta vantaggioso nel caso in cui si sia realmente interessati alla stima degli effetti del fattore B e della componente d'interazione AxB , mentre il fattore A viene introdotto esclusivamente per analizzarne gli effetti sull'altro fattore considerato, oppure nel caso in cui il fattore A non può essere testato su piccoli quantitativi di materiale.

Due sono, invece, i principali svantaggi di questo disegno, ovvero:

- a) In alcuni casi l'errore relativo alle *whole-units* è troppo grande rispetto a quello relativo alle *sub-units*, e ciò può comportare l'assenza di significatività per il fattore A , nonostante che il suo effetto sia rilevante; mentre gli effetti di B , che al contrario sono troppo ridotti per essere realmente interessanti, risultano statisticamente significativi.
- b) Il secondo svantaggio risiede nella presenza di più componenti erratiche, che contribuisce notevolmente ad aumentare la complessità dell'analisi, rispetto a quella effettuata per un disegno a blocchi randomizzati completi.

Nei casi in cui il numero di replicazioni e le condizioni sperimentali siano appropriate, nello *split-plot* le *whole-units* possono essere assegnate secondo un disegno a Quadrato Latino; in tal caso viene eliminata la componente di variabilità erratica dovuta ai due tipi di raggruppamento delle unità sperimentali, e risulta perciò preferibile utilizzare lo *split-plot* a Quadrato Latino piuttosto che il disegno a blocchi randomizzati completi.

¹⁹ Vedi, ad esempio, Cochran e Cox (1957).

Capitolo 4

***Split-plot*: innovazioni metodologiche**

Il disegno *split-plot* riveste un ruolo di fondamentale importanza all'interno delle applicazioni pratiche in ambito sperimentale, pertanto è di particolare interesse la sua relazione con i disegni fattoriali frazionali²⁰, già considerata brevemente nel capitolo precedente, e con la metodologia delle superfici di risposta (RSM). L'obiettivo principale di questo capitolo è proprio quello di approfondire ed ampliare alcuni aspetti del disegno *split-plot*, cercando di mettere in evidenza alcune innovazioni apportate dagli autori qui considerati, (Bisgaard (2000); Bingham e Sitter (2001); Myers e Montgomery (1997)), in merito alla struttura e all'analisi di questo particolare disegno.

4.1 *Split-plot* e fattoriale frazionale: identificazione dei confondimenti

Gli aspetti considerati in questa sede riguardano, in primo luogo, le regole proposte per la pianificazione e l'analisi di un disegno *split-plot* risultante dalla combinazione di piani fattoriali, o fattoriali frazionali, in cui vengono considerati fattori a due livelli, Bisgaard (2000). Si considerano in particolare i criteri utilizzati per l'identificazione dei *confounding*, e quindi degli *alias patterns*, all'interno delle due matrici che compongono lo *split-plot*: la matrice interna e la matrice esterna. A questo proposito vedremo come, dall'utilizzo di differenti strutture di confondimenti all'interno del medesimo disegno dipenda il numero di prove necessarie alla conduzione dell'analisi, e, conseguentemente, come la scelta di un opportuno *alias pattern* possa notevolmente semplificare l'analisi, rendendola più veloce.

Un ulteriore problema, Bisgaard (2000), riguarda la presenza di una duplice fonte di errore all'interno del disegno, illustrando quelli che sono i criteri da utilizzare nella scelta di quali effetti verificare sulla componente di *whole-plot error* e quali sul *sub-plot error*. Infine, la parte conclusiva del paragrafo è dedicata alle regole proposte per il calcolo della componente di variabilità erratica del disegno.

Come già anticipato, accanto alla trattazione degli aspetti teorici dei suddetti argomenti riportiamo alcuni esempi illustrativi tratti da Bisgaard (2000), al quale si rimanda per ulteriori approfondimenti.

²⁰ Per i concetti di Risoluzione, *confounding effect* e *defining contrast*, ampiamente utilizzati in questo capitolo, si rimanda a Myers e Montgomery (1997).

4.1.1 Confounding e frazionamento di uno split-plot

Supponiamo di considerare un esperimento in cui si vogliono analizzare gli effetti di quattro fattori, due fattori di disegno: A e B , e due fattori ambientali: P e Q ; se si ritiene economicamente e praticamente svantaggioso condurre tutte le 16 prove sperimentali del disegno fattoriale completo, si può decidere di frazionare la matrice contenente i *sub-factors*, seguendo due possibili alternative. Se, per determinate ragioni, la matrice contenente i *sub-factors* deve essere la medesima per ogni *whole-unit* considerata, allora, per limitare il numero di prove necessarie all'analisi, si può decidere di confondere i due fattori ambientali P e Q e analizzare soltanto le condizioni estreme: $(-, -)$ e $(+, +)$, che nella matrice riportata qui di seguito sono indicate con il simbolo “#”(fig.: 4.1); in questo caso il *defining contrast* è $I = PQ$. Questa scelta consente però di verificare se il prodotto analizzato è robusto o meno rispetto ai fattori ambientali e di stimare esclusivamente l'effetto combinato dei due fattori P e Q , senza sapere a quale dei due fattori sia in realtà dovuto l'effetto.

Inoltre, sebbene il fatto di confondere gli effetti dei due fattori ambientali possa risultare in alcuni casi vantaggioso, poiché consente di limitare il numero delle prove da eseguire, nell'esempio qui considerato da 16 a 8, non dobbiamo dimenticare che stiamo confondendo due effetti principali. In alternativa, se si rinuncia alla necessità di creare il medesimo *sub-plot* per ogni *whole-unit*, la situazione può notevolmente migliorare. Per esempio, si può utilizzare, sempre per il caso proposto in precedenza, la frazione $1/2$ con $I = + PQ$ per la prima e la quarta *whole-unit*, e la frazione complementare con $I = - PQ$, per la seconda e la terza. In questo modo si ottiene un piano con *Risoluzione IV* in cui PQ^{21} viene confuso con AB e il *defining contrast* utilizzato è $I = ABPQ$. Questa seconda opzione è indicata nella matrice dal simbolo “x” (fig.4.1).

Fig.: 4.1 Matrice del disegno

		P				
		Q	-	+	-	+
A	B		-	-	+	+
-	-	#	x	#	x	
+	-	#	x	x	#	
-	+	#	x	x	#	
+	+	#	x	#	x	

²¹ In questa sede si preferisce riferirsi ai vettori, piuttosto che agli effetti corrispondenti.

Lo schema di confondimento proposto nella matrice viene indicato da Bisgaard (2000) con il termine *split-plot confounding*²². In generale consiste nell'utilizzare diversi gradi di frazionamento per le *sub-units*, confondendo gli effetti relativi ai *whole-factors* con quelli associati ai *sub-factors*; risulta particolarmente utile per il disegno *split-plot* in quanto solitamente si necessita di una maggiore Risoluzione per i *sub-factors*.

4.1.2 Le alternative proposte per l'applicazione dello *split-plot confounding*

In relazione allo *split-plot confounding*, si analizzano quattro modi alternativi di applicazione di tale concetto, (Bisgaard 2000); in tutti i casi illustrati si considera un esperimento in cui sono coinvolti sei fattori sperimentali: tre fattori di disegno, (*whole-plot factors*), indicati con *A*, *B* e *C*, e tre ambientali, (*sub-plot factors*), indicati con *P*, *Q* ed *R*; si assume inoltre di voler condurre un massimo di 16 prove sperimentali. I quattro disegni proposti sono caratterizzati da differenti Risoluzioni e strutture di confondimento, i cosiddetti *alias patterns*, e dall'utilizzo di determinate strategie. Quale tra le alternative sia la migliore dipende in gran parte dal contesto dell'analisi e dai suoi obiettivi; sarà dunque compito dello sperimentatore scegliere il disegno più opportuno analizzando in ogni sua caratteristica la situazione sperimentale proposta e gli obiettivi che con l'analisi di essa si vogliono raggiungere.

Si consideri ora, a titolo di esempio, il caso in cui, come già detto, *A*, *B* e *C* sono i *whole-factors*, e *P*, *Q* ed *R* i *sub-factors*.

Uno *split-plot* standard composto da due matrici, una matrice interna ed una esterna, entrambe generate da piani fattoriali frazionali 2^{3-1} , ha la seguente struttura (fig.: 4.2):

Fig.: 4.2 Split-plot e confounding

		P				
		Q				
		R=PQ				
A	B	C=AB	-	+	-	+
-	-	+	X	X	X	X
+	-	-	X	X	X	X
-	+	-	X	X	X	X
+	+	+	X	X	X	X

²² Questo importante concetto è stato originariamente introdotto da Bartlett (1935).

Va sottolineato che in questo disegno, il *defining-contrast* utilizzato per frazionare la matrice interna, (*whole-plot array*), è $I = ABC$, mentre nella matrice esterna si utilizza $I = PQR$.

Si dimostra, Bisgaard (2000), che il *defining contrast* per il disegno è:

$$I = ABC = PQR = ABCPQR$$

Riportiamo qui di seguito (fig.: 4.3) la struttura dei confondimenti, fino alle interazioni del primo ordine, ottenuta dalla scelta del suddetto generatore.

Fig.: 4.3 Alias pattern fino alle interazioni del I ordine per $I=ABC=PQR=ABCPQR$

$I_1 \rightarrow A + BC$	$I_5 \rightarrow Q + PR$	$I_9 \rightarrow AR$	$I_{13} \rightarrow CP$
$I_2 \rightarrow B + AC$	$I_6 \rightarrow R + PQ$	$I_{10} \rightarrow BP$	$I_{14} \rightarrow CQ$
$I_3 \rightarrow C + AB$	$I_7 \rightarrow AP$	$I_{11} \rightarrow BQ$	$I_{15} \rightarrow CR$
$I_4 \rightarrow P + QR$	$I_8 \rightarrow AQ$	$I_{12} \rightarrow BR$	

Si nota immediatamente che il vantaggio principale di un tale disegno risiede nell'assenza di confondimenti tra interazioni del primo ordine; pertanto, se l'obiettivo principale dello studio è la stima degli effetti delle interazioni tra *whole-factors* e *sub-factors*, un disegno di Risoluzione III può risultare migliore anche di un disegno con Risoluzione più ampia.

Supponiamo ora di applicare il concetto di *split-plot confounding* al disegno precedentemente illustrato, confondendo PQR con C , otteniamo in questo caso la seguente struttura, in cui $I = ABC = CPQR = ABPQR$ (fig. 4.4).

Fig.: 4.4 Struttura matriciale con $I = ABC = CPQR = ABPQR$

A	B	C	
-	-	+	$I = + PQR$
+	-	-	$I = - PQR$
-	+	-	$I = - PQR$
+	+	+	$I = + PQR$

In cui l' *alias pattern* fino alle interazioni del primo ordine è illustrato in figura 4.5.

Fig.: 4.5 Alias pattern fino alle interazioni del I ordine per $I = ABC = CPQR = ABPQR$

$I_1 \rightarrow A + BC$	$I_5 \rightarrow Q$	$I_9 \rightarrow AR$	$I_{13} \rightarrow CP + QR$
$I_2 \rightarrow B + AC$	$I_6 \rightarrow R$	$I_{10} \rightarrow BP$	$I_{14} \rightarrow CQ + PR$
$I_3 \rightarrow C + AB$	$I_7 \rightarrow AP$	$I_{11} \rightarrow BQ$	$I_{15} \rightarrow CR + PQ$
$I_4 \rightarrow P$	$I_8 \rightarrow AQ$	$I_{12} \rightarrow BR$	

Osservando l'*alias pattern* di figura 4.5 si nota immediatamente che, in questa seconda situazione, gli effetti principali dei *sub-factors*, indicati con l_4 , l_5 e l_6 , non si confondono più con alcuna interazione del primo ordine. D'altra parte, alcune interazioni tra *whole* e *sub-factors* si confondono con altre interazioni del primo ordine, si veda per esempio l_{13} , l_{14} e l_{15} , inoltre gli effetti principali dei *whole-factors* si confondono con alcune interazioni del primo ordine.

La terza alternativa proposta presuppone che siano i livelli dei *sub-factors* ad essere variati senza difficoltà, invece di quelli dei *whole-factors*, come avveniva nei precedenti disegni; in questo caso è utile invertire l'assegnazione dei fattori, quelli di disegno (*whole-factors*) alla matrice esterna, e quelli ambientali (*sub-factors*) a quella interna; si applica comunque il concetto di *split-plot confounding*, confondendo ABC con R ; otteniamo così il disegno mostrato nella tabella seguente, in cui $I = PQR = ABCR = ABCPQ$ (fig.: 4.6).

Fig.: 4.6 Struttura matriciale con $I = PQR = ABCR = ABCPQ$

P	Q	R	
-	-	+	$I = + ABC$
+	-	-	$I = - ABC$
-	+	-	$I = - ABC$
+	+	+	$I = + ABC$

L'*alias pattern* del disegno appena illustrato, fino alle interazioni del primo ordine, è il seguente (fig. 4.7):

Fig.: 4.7 Alias pattern fino alle interazioni del I ordine per $I = PQR = ABCR = ABCPQ$

$l_1 \rightarrow A$	$l_5 \rightarrow Q + PR$	$l_9 \rightarrow AR + BC$	$l_{13} \rightarrow CP$
$l_2 \rightarrow B$	$l_6 \rightarrow R + PQ$	$l_{10} \rightarrow BP$	$l_{14} \rightarrow CQ$
$l_3 \rightarrow C$	$l_7 \rightarrow AP$	$l_{11} \rightarrow BQ$	$l_{15} \rightarrow CR + AB$
$l_4 \rightarrow P + QR$	$l_8 \rightarrow AQ$	$l_{12} \rightarrow BR + AC$	

Anche in questo caso abbiamo un disegno con Risoluzione III; si noti però che gli effetti principali dei fattori di disegno A , B e C non vengono confusi con alcuna interazione del primo ordine, mentre lo sono gli effetti principali dei fattori ambientali P , Q ed R . Un importante vantaggio di questo particolare disegno, evidenziato anche da Michaels (1964), risiede nel fatto che esso garantisce una maggiore precisione nella stima degli effetti dei fattori ambientali, dunque, in generale, dei fattori assegnati ai *sub-plots*.

Il quarto ed ultimo disegno prevede l'assenza di ogni tipo di restrizione alla randomizzazione, possiamo quindi tranquillamente utilizzare un piano fattoriale frazionale standard 2^{6-2} , il quale

prevede l'esecuzione di sedici prove sperimentali, in cui si ha $Q = ABC$ ed $R = BCP$; pertanto il *defining contrast* utilizzato nel disegno è $I = ABCQ = BCPR = APQR$, che implica una Risoluzione IV per il disegno e la struttura di confondimenti illustrata in (fig. 4.8).

Evidentemente, il vantaggio fondamentale di questa alternativa è quello di consentire la stima esatta²³ di tutti gli effetti principali, sia di quelli dei *whole-factors* sia di quelli dei *sub-factors*, che non risultano confusi con alcuna interazione del primo ordine; nel disegno però, le interazioni del primo ordine si confondono tra loro.

Fig.: 4.8 Alias pattern fino alle interazioni del I ordine per $I = ABCQ = BCPR = APQR$

$l_1 \rightarrow A$	$l_5 \rightarrow Q$	$l_9 \rightarrow AR + PQ$	$l_{13} \rightarrow CQ + AB$
$l_2 \rightarrow B$	$l_6 \rightarrow R$	$l_{10} \rightarrow BP + CR$	
$l_3 \rightarrow C$	$l_7 \rightarrow AP + QR$	$l_{11} \rightarrow BQ + AC$	
$l_4 \rightarrow P$	$l_8 \rightarrow AQ + PR + BC$	$l_{12} \rightarrow BR + CP$	

Per concludere ricordiamo che, come già detto all'inizio del paragrafo, la scelta tra le quattro alternative proposte per l'applicazione dello *split-plot confounding* dipende essenzialmente dagli obiettivi dell'analisi.

4.1.3 Le regole per il confondimento

Nel paragrafo precedente sono stati presentati quattro modi alternativi di pianificare un disegno *split-plot* $2^{k-p} \times 2^{q-r}$ tenendo conto di determinate regole per i confondimenti; l'obiettivo di questo paragrafo è quello di analizzare tali regole in maniera più approfondita.

Prima di iniziare la discussione relativa al *confounding* all'interno di uno *split-plot* è utile illustrare il concetto di Risoluzione parziale di un sottoinsieme dei fattori coinvolti nell'analisi, che indichiamo con S . Il concetto di Risoluzione parziale risulta comunque legato al concetto classico di Risoluzione, utilizzato, come visto, nei piani fattoriali frazionali: il piano sperimentale associato al sottoinsieme S di fattori ha risoluzione parziale R_s se nessun effetto coinvolgente p degli S fattori selezionati si confonde con effetti che coinvolgono meno di $R_s - p$ fattori, considerando anche quelli che non appartengono ad S . Si può affermare, come in generale vale per piani fattoriali frazionali con fattori a due livelli, che la Risoluzione parziale è uguale alla lunghezza del più corto *defining contrast* tra quelli relativi ai soli fattori appartenenti al sottoinsieme S .

Nell'esempio proposto nel paragrafo precedente si è analizzato uno *split-plot* con confondimenti $2^{3-1} \times 2^{3-1}$, affermando che l'insieme dei *defining contrasts* per entrambe le matrici era il seguente: $\{ABC, CPQR, ABPQR\}$; indichiamo ora con $S_d = \{A, B, C\}$ il sottoinsieme di *whole-factors* e con

²³ Per "esatta" si intende, in questa sede, non confusa.

$S_e = \{P, Q, R\}$ quello dei *sub-factors*. Osservando i *defining contrasts* notiamo subito che la *word* più corta contenente tutti i fattori del sottoinsieme S_d è ABC , e quindi la Risoluzione parziale dei *whole-factors* è pari a III, mentre il termine più corto che contiene tutti gli elementi di S_e è $CPQR$, ciò significa che l'insieme dei *sub-factors* ha Risoluzione IV.

Riprendendo i concetti illustrati da Box e Hunter (1961), secondo i quali un disegno fattoriale frazionale 2^{k-f} avrà f generatori indipendenti, che indichiamo con $G_1, G_2, \dots, G_f$, e che il sottogruppo di *defining contrast* $\{\mathbf{I}\}$, per un determinato frazionamento contenente 2^f *words*, viene ottenuto moltiplicando per due il prodotto $(I \pm G_1)(I \pm G_2) \dots (I \pm G_f)$, in cui $\mathbf{I}$ è il vettore identità, si può affermare che le 2^f differenti frazioni del disegno sono date dalle 2^f possibili permutazioni dei segni $\pm$ in tale prodotto. Ricordiamo anche che, come indica il nome stesso, il sottoinsieme dei *defining contrasts* identifica univocamente un determinato piano fattoriale frazionale, consentendoci quindi di poter individuare gli *aliases* indispensabili per l'analisi.

Come già evidenziato in precedenza, esistono differenti modi per pianificare un disegno *split-plot*, noi facciamo riferimento, in questo contesto, allo *split-plot* standard, ovvero al disegno basato sull'assegnazione dei fattori di disegno alle *sub-units* e dei fattori ambientali alle *whole-units*.

Indichiamo con $\mathbf{X}$ la matrice interna, o matrice dei *whole-factors*, e con $\mathbf{Y}$ quella esterna, ovvero la matrice dei *sub-factors*, il prodotto cartesiano $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ indicherà, dunque, la matrice contenente tutte le possibili combinazioni tra i vettori delle due matrici $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & \cdots & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1q} \\ y_{21} & \cdots & \cdots & y_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{m1} & \cdots & \cdots & y_{mq} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1, y_1) \\ (x_1, y_2) \\ \vdots \\ (x_1, y_m) \\ (x_2, y_1) \\ \vdots \\ (x_n, y_m) \end{pmatrix}$$

Consideriamo un disegno *split-plot* composto da due matrici, la matrice $\mathbf{X}$ contenente i *whole-factors* data da un piano fattoriale frazionale 2^{k-p} con risoluzione R_1 e con generatori indipendenti $G_1, \dots, G_p$; accanto ad essa si ha la matrice $\mathbf{Y}$, data da un 2^{q-r} con risoluzione R_2 , e con generatori

indipendenti $K_1, \dots, K_r$; il disegno completo è composto da $2^{(k+p) - (p+r)}$ righe, e l'insieme dei *defining contrast* conta $2^{p+r} - 1$ termini.

Se lo *split-plot* considerato è dato dal prodotto cartesiano delle due matrici X e Y appena introdotte, allora l'insieme dei *defining contrasts* sarà dato dal prodotto:

$$\left[\prod_{i=1}^p (I \pm G_i) \right] \left[\prod_{j=1}^r (I \pm K_j) \right]$$

moltiplicato per due, in cui i segni $\pm$ devono essere usati allo stesso modo in cui sono stati utilizzati nelle matrici X e Y .

La Risoluzione del disegno completo ottenuto dal prodotto cartesiano delle due matrici è $R = \min \{R_1, R_2\}$, dove R_1 è la Risoluzione parziale relativa alle *whole-units*, e R_2 quella parziale associata alle *sub-units*; da quanto appena detto si deduce che per ottenere disegni completi di alta Risoluzione è importante massimizzare le Risoluzioni parziali dei singoli piani, ovvero delle due matrici.

Una proprietà interessante relativa ai *confounding effects* nello *split-plot* è che se il piano contenente le *whole-units* ha Risoluzione parziale R_1 e quello contenente le *sub-units* ha Risoluzione pari a R_2 , allora gli effetti principali dei *whole-factors* saranno confusi con le interazioni tra $R_1 - 1$ *whole-factors*, e pertanto, gli effetti principali dei *sub-factors* si confondono con le interazioni, tra *sub-factors* stessi, che coinvolgono $R_2 - 1$ fattori. Questo implica che le interazioni del primo ordine tra *whole-factors* e *sub-factors* sono confuse con altre interazioni di ordine uguale a: $\min \{R_1 - 1, R_2 - 1\} + 1$, o più semplicemente, pari a $\min (R_1, R_2)$. Quindi, se entrambe le matrici del disegno hanno Risoluzione III, o maggiore, allora le interazioni del primo ordine tra *whole-factors* e *sub-factors* non sono confuse con nessun'altra interazione del primo ordine, mentre possono confondersi con interazioni di ordine più alto.

Si consideri, a titolo d'esempio, lo *split-plot* proposto da Bisgaard (2000). In tale esempio il disegno considerato si compone di una matrice X , in cui compaiono i *whole-factors*, generata a un piano fattoriale frazionale 2^{5-2} , con Risoluzione III, che indichiamo con R_1 e generatori $G_1 = ABD$ e $G_2 = ACE$, e una seconda matrice Y , associata ai *sub-factors*, generata da un 2^{3-1} con Risoluzione $R_2 = III$, il cui generatore è $K_1 = PQR$. Il disegno che si ottiene dal prodotto cartesiano tra la matrice interna e la matrice esterna è composto da $2^{(5+3) - (2+1)} = 32$ combinazioni, l'insieme dei *defining contrasts* consta di $2^{2+1} - 1$ termini, per quanto precedentemente affermato, uguali a:

$$\begin{aligned} (I + G_1)(I + G_2)(I + K_1) &= (I + ABD)(I + ACE)(I + PQR) = \\ &= I + ACE + ABD + BCDE + PQR + ACEPQR + ABDPQR + BCDEPQR \end{aligned}$$

da cui si giunge alla conclusione che per tale disegno, che ha Risoluzione III, il sottoinsieme dei *defining contrast* è:

$$\{ I \} = \{ I, ABD, ACE, BCDE, PQR, ABDPQR, ACEPQR, BCDEPQR \}$$

La Risoluzione di entrambe le matrici, quella interna e quella esterna, è pari a III.

Applicando le regole appena formalizzate, in questo caso, possiamo tranquillamente affermare che un'interazione tra un *whole-factor* e un *sub-factor*, come per esempio $A \times P$, non si confonde mai con altre interazioni del primo ordine, ma può essere confusa con interazioni di ordine pari a $\min\{R_1, R_2\} - 1 = 2$; inoltre, gli effetti principali dei *whole-factors* sono confusi con interazioni tra $R_1 - 1 = 2$ *whole-factors*, mentre gli effetti principali dei *sub-factors* con interazioni del primo ordine tra *sub-factors* stessi, in quanto $R_2 - 1 = 2$.

4.2 Le due componenti di errore presenti nello *split-plot*

Un importante aspetto da considerare nell'analisi di un disegno *split-plot* riguarda la struttura della componente erratica. Come ampiamente discusso nel primo capitolo, il disegno *split-plot* è caratterizzato dalla presenza di due componenti residue, dovute alla presenza di correlazione tra *whole-units* e *sub-units*. L'obiettivo di questo paragrafo, sempre con riferimento all'articolo citato, è quello di illustrare le regole da seguire per decidere quali effetti verificare sulla componente di *whole-plot error* e quali sul *sub-plot error*²⁴. Solitamente, infatti, l'analisi della varianza di uno *split-plot* si suddivide in due parti, una in cui viene utilizzata la componente di *whole-plot error*, o varianza “tra”, per valutare determinati effetti, e l'altra in cui si utilizza il *sub-plot error*, o varianza “entro”, al fine di verificare la significatività di altri fattori.

Come esempio illustrativo proponiamo uno *split-plot*, utilizzato da Daniel (1976), e ripreso da Bisgaard (2000), generato dal prodotto cartesiano $2^1 \times 2^2$. Riportiamo nella tabella seguente la struttura del disegno (fig.4.9).

Fig.: 4.9 Esempio di *split-plot* $2^1 \times 2^2$

	B	-	+	-	+
A	C	-	-	+	+
-		Y ₁₍₁₎	Y ₂₍₁₎	Y ₃₍₁₎	Y ₄₍₁₎
+		Y ₁₍₂₎	Y ₂₍₂₎	Y ₃₍₂₎	Y ₄₍₂₎

Daniel afferma: “risulta ovvio che gli effetti principali di B e di C e l'interazione $B \times C$ siano stimati entro le unità, mentre non è così evidente che lo siano anche gli effetti delle componenti d'interazione $A \times B$, $A \times C$ e $A \times B \times C$ ”. Partendo da questa giusta affermazione, Bisgaard (2000)

²⁴ Daniel (1976), discute ampiamente questo problema, ne proponiamo, in quest'ambito, una illustrazione, per quanto possibile, semplificata.

propone una regola più semplice per individuare su quale componente di errore verificare gli effetti dei fattori. Tale regola consiste nello stimare, prima di tutto, la componente di varianza associata ai fattori tramite il modello utilizzato nell'analisi. In particolare, il modello corrispondente al disegno illustrato in figura 4.9 è il seguente:

$$y_{i(j)} = f(x_{ij}) + \varepsilon_{1j} + \varepsilon_{0i(j)} \quad \text{con } i = 1, \dots, 4; \quad j = 1, 2 \quad (4.1)$$

in cui con x_{ij} si indicano le righe della matrice del disegno, f è una funzione lineare, ε_{1j} rappresenta la componente di *whole-plot-error* con varianza σ^2_1 , ed $\varepsilon_{0i(j)}$ il *sub-plot-error* con varianza σ^2_0 .

Riscrivendo i termini del modello per ciascuna riga della matrice del disegno, trascurando la parte deterministica, si comprende meglio il motivo per cui in questo tipo di disegno alcuni effetti siano verificati rispetto ad una componente di errore ed alcuni rispetto ad un'altra. Di seguito riportiamo la tabella che mostra il modello esteso ad ogni riga del disegno (fig.4.10).

Fig.: 4.10 Disegno sperimentale

A	B	C	AB	AC	BC	ABC	Osserv.	Errore
-	-	-	-	+	+	-	$y_{1(1)}$	$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{01(1)}$
-	+	-	+	+	-	+	$y_{2(1)}$	$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{02(1)}$
-	-	+	-	-	-	+	$y_{3(1)}$	$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{03(1)}$
-	+	+	+	-	+	-	$y_{4(1)}$	$\varepsilon_{11} + \varepsilon_{04(1)}$
+	-	-	-	+	+	+	$y_{1(2)}$	$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{01(2)}$
+	+	-	+	+	-	-	$y_{2(2)}$	$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{02(2)}$
+	-	+	-	-	-	-	$y_{3(2)}$	$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{03(2)}$
+	+	+	+	-	+	+	$y_{4(2)}$	$\varepsilon_{12} + \varepsilon_{04(2)}$

Ricordiamo che con A si indica il *whole-factor*, con B e C i *sub-factors*; si sottolinea inoltre che la stima di ciascun effetto la si ottiene stimando il confronto $(\bar{y}_+ - \bar{y}_-)$. Facendo riferimento alla tabella (fig.4.10) e utilizzando i segni usati per i livelli del fattore A , la stima di quest'ultimo può essere scritta come:

$$A = 1/4 (4 \varepsilon_{11} - 4 \varepsilon_{12} + \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{0j(1)} - \sum_{j=1}^2 \varepsilon_{0j(2)}) \quad (4.2)$$

e la relativa stima della varianza è:

$$\text{VAR}(A) = 1/16 (16\sigma^2_1 + 16\sigma^2_1 + 4\sigma^2_0 + 4\sigma^2_0) = 2\sigma^2_1 + 1/2\sigma^2_0 \quad (4.3)$$

che rappresenta l'errore standard associato all'effetto principale del *whole-factor* A^{25} .

Lo stesso procedimento si adotta per il *sub-factor* B ; sempre utilizzando la tabella proposta, notiamo che tutte le componenti di *whole-plot error* si eliminano e ciò che rimane è:

²⁵ In questa sede si ipotizza, come in precedenza, l'indipendenza tra le due componenti di errore.

$$B = 1/4 \left(\sum_{j=1}^2 \pm \varepsilon_{0j(1)} - \sum_{j=1}^2 \pm \varepsilon_{0j(2)} \right) \quad (4.4)$$

e la corrispondente stima della varianza è:

$$\text{VAR}(B) = 1/16 (4\sigma_0^2 + 4\sigma_0^2) = 1/2\sigma_0^2 \quad (4.5)$$

La quale, confrontata con la varianza relativa al fattore A , risulta molto più piccola.

Sempre osservando la tabella si nota che per tutti gli effetti, eccetto che per l'effetto principale di A , la componente di *whole-plot error* ε_1 si annulla, esattamente allo stesso modo in cui si annullava calcolando la varianza per il fattore B . Pertanto, la varianza per gli effetti di B , C , AxB , AxC , BxC e $AxBxC$ è $\sigma_0^2/2$. Quanto appena sostenuto per l'esempio proposto può essere tranquillamente esteso ad un qualsiasi disegno *split-plot* del tipo $2^{k-p} \times 2^{q-r}$; infatti, per tutti i $2^{k-p} - 1$ effetti stimabili dei *whole-factors*, ed i relativi confondimenti, la varianza è espressa in formula (4.6), dove $N = 2^{k-p} \times 2^{q-r}$.

$$\begin{aligned} \text{VAR}(A) &= \text{VAR} \{ 2/N (2^{q-r} \sum \pm \varepsilon_{1j} + \sum \pm \varepsilon_{0j}) \} = \\ &4/N^2 (2^{k-p} \times 2^{2(q-r)} \sigma_1^2 + N \sigma_0^2) = 4/N (2^{q-r} \sigma_1^2 + \sigma_0^2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

La varianza, invece, per le *sub-units* è:

$$\text{VAR}(P) = \text{VAR} \{ 2/N \sum \pm \varepsilon_{0j} \} = 4/N^2 N \sigma_0^2 = 4/N \sigma_0^2 \quad (4.7)$$

Un'importante conclusione che si trae dai calcoli appena presentati è che, essendo la varianza associata alle *sub-units* sempre minore di quella relativa alle *whole-units*, le stime degli effetti dei *whole-factors* risulteranno sempre meno precise di quelle ottenute per i *sub-factors*. Questa conclusione è una ulteriore conferma a quanto affermato fino ad adesso: ovvero, un aspetto particolarmente delicato quando si pianifica uno *split-plot* riguarda l'assegnazione dei fattori agli *whole-plots* piuttosto che ai *sub-plots*.

E' importante sottolineare che, estendendo i calcoli proposti nell'esempio ad un generico *split-plot* $2^{k-p} \times 2^{q-r}$ in cui si abbia un totale di $2^{k-p} \times 2^{q-r} - 1$ effetti stimabili, la regola generale per l'assegnazione dell'opportuna varianza a ciascun effetto risulta la seguente: “i $2^{k-p} - 1$ contrasti relativi ai *whole-factors*, ottenuti moltiplicando i $k-p$ generatori del *whole-plot* in ogni combinazione possibile, ed i rispettivi aliases, sono associati alla componente di *whole-plot error*; i rimanenti $2^{k-p} - (2^{q-r} - 1)$ contrasti saranno testati sul *sub-plot error*”, Bisgaard (2000).

4.3 I criteri di scelta di un disegno *fractional-factorial-split-plot*

I disegni fattoriali vengono applicati frequentemente nelle analisi; tuttavia, dal momento che, come ampiamente sottolineato, far variare i livelli dei fattori in alcuni casi risulta costoso, o impossibile dal punto di vista pratico, si rende necessaria la pianificazione di un disegno la cui struttura rispecchi quella di uno *split-plot*. A disegni in cui si combinano insieme fattoriali frazionali e *split-plot* si fa solitamente riferimento col termine *Factorial-Fractional-Split-Plot design*, (FFSP), ovvero, disegni fattoriali frazionali aventi la struttura di uno *split-plot*, Bingham e Sitter (2001).

Un aspetto particolarmente importante che si deve sottolineare è che mentre la struttura matriciale di un disegno FFSP coincide con quella di un fattoriale frazionale, ciò che si modifica è la randomizzazione.

Lo scopo di questa parte del lavoro è quello di fornire una risposta alle domande che il ricercatore si pone più di frequente, ovvero, “quale FFSP scegliere tra quelli pianificabili”, “quale frazione utilizzare per il *whole-plot*, e quale per il *sub-plot*”. Ci proponiamo, dunque, di illustrare un criterio di scelta del disegno FFSP che meglio soddisfi le necessità del ricercatore; il criterio proposto in questo ambito è quello della minima aberrazione, o *minimum aberration* (MA)²⁶.

Tale criterio costituisce un’alternativa all’applicazione del criterio della massima Risoluzione e viene appunto utilizzato in questa sede per valutare la bontà del disegno *split-plot* fattoriale frazionale. Tale criterio si basa sulla scelta di quel disegno che meglio riesce a bilanciare la quantità di informazioni sul processo, desumibili dall’analisi, al minimo costo. Oltre a ciò, si illustra l’influenza che la particolare struttura dello *split-plot* ha sulle stime dei coefficienti dei fattori, e sulla loro precisione, che, ricordiamolo, non è la medesima per ogni categoria di fattori considerata. Alla fine di questo paragrafo si propone anche un esempio pratico, tratto sempre dall’articolo citato, con lo scopo di illustrare le implicazioni da considerare nello scegliere il numero di *whole-units* e di *sub-units* da introdurre nel disegno, e, come già anticipato, del grado di frazionamento da utilizzare in esso.

4.3.1 Il criterio di “*minimum aberration*”

Per illustrare il criterio di *minimum aberration* (MA) introduciamo un esempio condotto in ambito industriale per verificare l’effetto di otto fattori sulle proprietà di resistenza all’usura di un prodotto di legno; i fattori considerati si distinguono in due categorie che hanno natura sperimentale diversa, da una parte vengono considerati cinque fattori coinvolti nella fase di *mixing* del materiale, che sono: il tipo di legno, la quantità dell’additivo 1, la quantità dell’additivo 2, la grandezza del legno

²⁶ Per approfondimenti sul criterio di *minimum aberration* si faccia riferimento anche a Huang, Chen e Voelkel (1998); Bingham e Sitter (1999).

ed infine, il grado di umidità del legno; la seconda categoria, considerata durante la fase di trasformazione del legno, è composta da tre fattori, quali: il tempo impiegato dal processo di trasformazione, la pressione e la densità del materiale; gli otto fattori vengono tutti considerati a due livelli. Come solitamente avviene, per motivi di riservatezza, non si dispone dei livelli originali, ma solo della definizione qualitativa: livello alto e livello basso.

L'obiettivo fondamentale dell'analisi è quello d'individuare i livelli dei fattori che minimizzano l'usura dell'oggetto.

Il processo produttivo si suddivide in due fasi, nella prima fase pezzi di legno differenti mescolati agli additivi vanno a costituire un'unità, la *whole-unit*, e quindi avremo tante *whole-units* quante sono le combinazioni dei fattori additivo 1, additivo 2, tipo di legno, grandezza e umidità; nella seconda fase, ogni *whole-unit* viene suddivisa in sotto-unità, le *sub-units*, alle quali saranno assegnati i livelli dei tre fattori rimanenti: durata del processo, pressione e densità del materiale.

In questa situazione sperimentale, ogni *whole-unit* può essere suddivisa in un numero di *sub-units* che varia da 2 a 4; dato che la creazione delle unità, per la natura stessa del processo, risulta molto costosa, è preferibile un disegno che consenta di limitarne quanto possibile il numero; sempre a causa degli elevati costi dell'esperimento si è ritenuto impraticabile condurre tutte le $2^8 = 256$ prove sperimentali previste dal piano fattoriale completo, e si è, dunque, optato per un piano fattoriale frazionale 2^{k-p} .

L'esperimento viene condotto nel modo seguente: inizialmente vengono fissati i livelli dei cinque fattori associati alle *sub-units*, le varie combinazioni possibili sono assegnate alle unità in modo completamente randomizzato; successivamente, le misture ottenute vengono suddivise in sotto-unità alle quali sono assegnati, sempre in modo casuale ma all'interno di ogni *whole-unit*, i trattamenti relativi all'altra categoria di fattori; evidentemente, la struttura descritta è quella di un disegno *split-plot*, in quanto, nella seconda fase di assegnazione dei livelli dei fattori, i livelli dei cinque *whole-factors* sono mantenuti costanti. Ricordiamo che ai *whole-factors* facciamo riferimento con le lettere *A, B, C, D* ed *E*, mentre ai *sub-factors* con *p, q* ed *r*.

L'analisi proposta prevede la pianificazione di un disegno FFSP del tipo $2^{(k_1 + k_2) - (p_1 + p_2)}$, in cui $k_1 = 5$, $k_2 = 3$ e $p_1 = p_2 = 1$; inoltre $k = k_1 + k_2$ e $p = p_1 + p_2$. Si ottiene quindi un piano 2^{8-2} in cui dobbiamo assegnare a due colonne corrispondenti a componenti d'interazione gli effetti principali di un *whole-factor* e un *sub-factor*; una tra le possibili scelte è la seguente:

$$E = ABCD \quad \text{e} \quad r = pq$$

ovvero, il livello del fattore *E* è determinato, per ogni prova, dalla combinazione dei livelli di *A, B, C, D*; allo stesso modo, il livello di *r* è determinato da quelli di *p* e *q*. I due generatori di questo disegno, indicati con **I**, sono:

$$I = ABCDE \quad \text{e} \quad I = pqr$$

queste due relazioni ne implicano una terza, ovvero:

$$I = ABCDEpqr$$

che, unita alle due precedenti, forma l'insieme dei *defining contrasts* del disegno:

$$I = pqr = ABCDE = ABCDEpqr$$

Tale disegno prevede l'esecuzione di 2^{5-1} prove per il *whole-plot* e 2^{3-1} per il *sub-plot*.

Il piano appena illustrato, come sostengono gli stessi Bingham e Sitter (2001), non rappresenta una scelta particolarmente buona, si tratta di un disegno con Risoluzione III, e si dimostra qui di seguito che, in base al criterio di *minimum aberration*, questa non è la scelta migliore.

Solitamente i disegni con Risoluzione maggiore vengono ritenuti migliori, questa è una delle regole più diffuse per la scelta di un particolare disegno fattoriale frazionale, bisogna però considerare che spesso, disegni con uguale Risoluzione presentano strutture di confondimento diverse, che implicano che i disegni stessi abbiano caratteristiche differenti.

Si definisca con $A_i(D_j)$ il numero di generatori di lunghezza i nel sottogruppo corrispondente al disegno D_j ; accanto al criterio della massima Risoluzione è stato quindi introdotto il criterio di *minimum aberration* secondo il quale:

“Supponendo di disporre di due disegni FFSP, D_1 e D_2 entrambi del tipo $2^{(k_1 + k_2) - (p_1 + p_2)}$, se $A_i(D_1) = A_i(D_2)$ per $i = 3, \dots, r-1$, e $A_r(D_1) < A_r(D_2)$, allora possiamo concludere che il disegno indicato con D_1 è meglio, in termini di “deviazione”, o *aberration*, del disegno D_2 ; un disegno è classificato quale MA se nessun altro disegno ad esso paragonato ha “deviazione” minore”.

Il criterio proposto fornisce una buona regola generale per confrontare più disegni sperimentali che abbiano la medesima Risoluzione.

Ritornando all'esempio illustrato precedentemente, abbiamo visto che il disegno considerato è un piano fattoriale frazionale $2^{(5+3) - (1+1)}$ con Risoluzione III. Applicando il criterio appena proposto, insieme a quello della massima Risoluzione si vede che, nel nostro contesto, è più appropriata la pianificazione di un $2^{(5+3) - (1+1)}$ di Risoluzione V, con il seguente insieme di *defining contrasts*:

$$I = ABCDE = ABpqr = CDpqr.$$

Si noti come il criterio di *minimum aberration* non sia un criterio di frazionamento in alternativa al criterio di Risoluzione, quanto piuttosto un criterio che integra il concetto di Risoluzione, permettendo di scegliere, tra fattoriali frazionali di Risoluzione uguale, quello migliore alla nostra specifica situazione sperimentale.

4.3.2 Analisi di un disegno *split-plot* fattoriale frazionale

Al fine di illustrare i criteri seguiti nell'analisi di un disegno *split-plot* fattoriale frazionale proponiamo un esempio riportato in Bingham e Sitter (2001), tratto da Miller et al. (1993). Si tratta di un disegno in cui vengono analizzati cinque fattori, tutti a due livelli, con quattro repliche per ciascuna combinazione sperimentale.

L'esperimento è condotto per analizzare la distorsione geometrica del meccanismo di sterzo di un'autovettura; i cinque fattori che influenzano la variabile di risposta sono così suddivisi: tre sono i *whole-factors*, indicati con A , B e C , e due i *sub-factors*, p e q . I *whole-factors* sono: il percorso di guida (A), la dimensione del dente d'ingranaggio (B), il collocamento del pezzo considerato (C); i *sub-factors*: la potenzialità del carburante (p), e la modalità di funzionamento (q). Si suppone, per ragioni di efficienza, di mantenere fissi i livelli dei fattori A , B , e C , e di far variare quelli di p e q , in modo da ottenere uno *split-plot* fattoriale frazionale $2^{(3+2) - (0+1)}$ ottenuto selezionando il *defining contrast* $\mathbf{I} = ABCpq$.

Il modello proposto per l'analisi di un tale disegno è il seguente (riprendendo in parte la notazione del paragrafo 3.1):

$$y_{ijk} = \mu + I_k + f(E_j) + \varepsilon_{jk} + g(D_i) + (DE)_{ij} + e_{ijk} \quad (4.8)$$

in cui ε ed e sono, rispettivamente, le componenti di errore per gli *whole-plots* e per i *sub-plots*, f e g sono le funzioni, nei parametri, relative ai *whole-factors* (E_j) ed ai *sub-factors* (D_i). Nel modello si assume che le due componenti erratiche ε ed e siano variabili casuali indipendenti e distribuite normalmente, con varianza rispettivamente σ_{wp}^2 e σ_{sp}^2 . Relativamente a queste due componenti si può agevolmente presupporre che la variabilità tra le unità, ovvero il *whole-plot error*, sia maggiore di quella interna alle unità, ovvero il *sub-plot error*, similmente a quanto avviene in un disegno completamente randomizzato. Si noti che in questo caso si possono in generale ipotizzare due forme funzionali distinte per i due gruppi: *whole* e *sub-plots*.

Dal momento che la parte di disegno relativa alle *whole-units* corrisponde esattamente ad un disegno completamente randomizzato, risulta opportuno condurre sui valori medi di esse una semplice analisi della varianza; pertanto, dato che nel disegno sono state registrate quattro repliche per ogni combinazione sperimentale, i gradi di libertà disponibili per la stima del *whole-plot error* sono in generale, se l sono le repliche, $(l - 1) 2^{(k_l - p_l)}$, ed in questo caso $(4 - 1) 2^{(k_l - p_l)}$. La parte relativa ai *sub-factors* viene considerata come un disegno randomizzato a blocchi, in cui i blocchi sono le *whole-units*. Nel nostro contesto, rientrano nell'analisi condotta al livello delle *sub-units* la stima degli effetti principali dei *sub-factors*, delle componenti di interazioni tra essi, ed anche la stima delle interazioni tra *sub-factors* e *whole-factors*; di conseguenza, date le

quattro replicazioni del disegno, i gradi di libertà disponibili per la stima del *sub-plot error* sono, poiché $l=4$:

$$(4 - 1)[2^{(k_1 + k_2) - (p_1 + p_2)} - 2^{(k_1 - p_1)}] \quad (4.9)$$

Ricordiamo che k_1 e k_2 sono, rispettivamente, il numero dei *whole-factors* e dei *sub-factors* considerati nell'analisi, mentre p_1 e p_2 i gradi di frazionamento utilizzati nei due piani del disegno. Si nota immediatamente che i gradi di libertà a disposizione per la stima del *sub-plot error* sono maggiori di quelli disponibili per la componente di *whole-plot error*. La differenza osservata tra le due componenti di errore, ed i rispettivi gradi di libertà, implica la diversa precisione con cui vengono stimati gli effetti dei *sub-factors* rispetto agli *whole-factors*. Dal momento che si assume che la variabilità associata al *sub-plot* sia minore di quella associata al *whole-plot*, e che il *sub-plot error* abbia almeno lo stesso numero di gradi di libertà del *whole-plot error*, la possibilità di individuare la significatività degli effetti dei *sub-factors* risulta maggiore. Consideriamo ora il FFSP dell'esempio. Abbiamo, come già anticipato, un disegno $2^{(3+2) - (0+1)}$ che prevede l'esecuzione di 16 prove sperimentali e consente la stima di tutti gli effetti principali e di tutte le interazioni del primo ordine; mentre le interazioni del secondo ordine e di ordini maggiori, le quali si confondono con alcuni effetti principali o con interazioni del primo ordine, vengono assunte trascurabili. Le difficoltà maggiori si presentano, in questo tipo di disegno, quando gli effetti dei *whole-factors* si confondono con quelli dei *sub-factors*, in questo caso, infatti, si pone $ABC = pq$, e pertanto, l'interazione tra i *whole-factors* A , B e C , si confonde con l'interazione tra i *sub-factors* p e q . In questo tipo di piano la significatività degli effetti degli *whole-factors* viene verificata confrontando la loro devianza con la componente di *whole-plot error*; mentre per la significatività degli effetti dei *sub-factors*, si procede mettendo a paragone la devianza relativa agli effetti con l'errore dei *sub-plot*. Spesso però, può manifestarsi qualche dubbio nella scelta di quali effetti verificare su quale componente erratica. A questo proposito, come illustrato nel paragrafo 4.1.2, Bisgaard (2000) fornisce i criteri per una scelta, ritenuta opportuna, schematizzati come segue:

1. gli effetti principali relativi ai *whole-factors* e le interazioni che includono solo fattori appartenenti agli *whole-plots*, vengono valutati sul *whole-plot error*;
2. gli effetti principali dei *sub-factors*, o le interazioni tra *whole-factors* e *sub-factors* che si confondono con gli effetti principali dei *whole-factors*, e le interazioni tra *whole-factors*, vengono valutati sul *whole-plot error*;

3. gli effetti principali dei *sub-factors* e le interazioni che coinvolgono almeno un *sub-factors*, che non si confondono con alcun effetto principale dei *whole-factors* o con interazioni che coinvolgono anche un solo *whole-factor*, vengono verificati sul *sub-plot error*.

Pertanto, nel nostro disegno, il *whole-plot error* dovrebbe essere utilizzato per valutare la significatività dell'effetto $pq = ABC$, dal momento che A , B e C sono *whole-factors*.

Non si mostrano nel dettaglio i risultati dell'analisi relativi all'esempio di Miller (1993); si sottolinea comunque che, nel caso di analisi statistica di dati derivanti da *split-plot*, i *normal-probability plots* utilizzati per individuare la significatività o meno degli effetti considerati sono due: uno per i *whole-factors* e uno per i *sub-factors*; in questo esempio, si riscontra l'elevata significatività degli effetti di C , p , q , e la significatività di Ap , Bp e Cq .

Un aspetto molto importante, sottolineato da Bingham e Sitter (2001), è rappresentato dalle due proprietà cui si deve far riferimento nella scelta di un FFSP:

- identificabilità: ovvero la capacità del disegno di stimare il maggior numero possibile di effetti principali e di interazioni del primo ordine;
- precisione: ovvero individuare la significatività degli effetti considerati con la massima precisione possibile.

Questa ultima proprietà costituisce una ulteriore valutazione da fare al momento della pianificazione e deve essere coniugata al criterio di *minum aberration*.

4.3.3 Come scegliere un FFSP: la scissione dello *split-plot* (*the splitting*)

In questo paragrafo si sottolineano alcuni aspetti da tenere presenti nella selezione di un disegno *split-plot* fattoriale frazionale; tali aspetti riguardano la scelta del grado di frazionamento, i costi dell'esperimento ed il numero di osservazioni sperimentali necessarie; infine, ma non in ordine di importanza, la decisione di come effettuare la "separazione" del disegno, o più propriamente, lo *splitting*, ovvero quali fattori considerare come *whole-factors* e quali come *sub-factors*.

In determinate analisi, si è vincolati da particolari circostanze nell'assegnazione dei fattori alle *whole-units* ed alle *sub-units*; la libertà di scelta, risulta dunque, molto limitata. In alcune situazioni a determinare le modalità di assegnazione dei fattori sono la difficoltà e i costi necessari alla variazione dei livelli dei fattori stessi. Per esempio, se si considera un esperimento in cui vengono analizzati i fattori A e B , per i quali, variare il livello risulta particolarmente costoso, allora questi fattori formano l'insieme dei *whole-factors* del disegno. Questa scelta permette, infatti, di mantenere fisso il livello, sia di A che di B , per ciascuna *whole-unit*, consentendo così di limitare i costi dell'analisi.

Sebbene condurre un esperimento secondo un disegno *split-plot* sia, nella maggior parte dei casi, economicamente vantaggioso, bisogna comunque considerare che esso provoca una perdita in precisione nelle stime degli effetti relativi ai *whole-factors*, e delle componenti d'interazione tra questi. Quindi, anche se spesso il ricercatore è portato ad aumentare il numero dei *whole-factors*, e diminuire quindi quello dei *sub-factors*, con l'obiettivo di limitare i costi dell'analisi, egli deve far attenzione a non sacrificare eccessivamente la precisione delle stime ottenute, in particolar modo per quei fattori che hanno un ruolo rilevante per l'analisi stessa.

Solitamente, infatti, si assegnano alle *whole-units* quei fattori che non interessano direttamente lo sperimentatore, e viceversa, si assegnano alle *sub-units* i fattori di reale interesse, in quanto le relative stime risulteranno più precise.

L'aspetto relativo al grado di frazionamento da utilizzare nel *whole-plot* e nel *sub-plot* è legato alla scelta dell'assegnazione dei fattori del disegno; in corrispondenza, infatti, dei vari *splitting* possibili, si presentano le differenti alternative di frazionamento del disegno, le quali vanno, a loro volta, ad influenzare i costi e l'efficienza del disegno stesso. Si deve anche sottolineare che la decisione di quale frazione del disegno completo utilizzare risulta direttamente legata a due aspetti molto importanti: la capacità del disegno di stimare gli effetti dei fattori e quale componente erratica viene utilizzata per verificare la significatività delle interazioni.

Per illustrare meglio quanto appena detto riguardo agli aspetti da mettere a confronto nella scelta di un FFSP, illustriamo due esempi proposti da Bingham e Sitter (2001).

Si consideri, in primo luogo, una situazione sperimentale in cui si voglia analizzare l'effetto che sei fattori, tutti osservati a due livelli, hanno su una determinata variabile di risposta; i fattori sono divisi in *whole-factors* e *sub-factors*, tre appartengono al primo gruppo, indicati al solito con A , B e C , tre al secondo: p , q ed r . Abbiamo quindi, $k_1 = 3$ e $k_2 = 3$, si supponga inoltre di non voler effettuare tutte le 64 prove previste dal fattoriale completo 2^6 , ma di voler limitare il numero di prove a 16. Gli unici due possibili disegni *split-plot* fattoriali frazionali, tra cui il ricercatore può scegliere, sono un $2^{(3+3)-(1+1)}$ e un $2^{(3+3)-(0+2)}$, indicati rispettivamente con D_1 e D_2 , con generatori:

$$D_1: I = ABC = Apqr = BCpqr$$

$$D_2: I = Abpq = ACpr = BCqr$$

Dal momento che il generatore del *whole-plot* deve contenere soltanto *whole-factors*, il più "lungo" *defining contrast* D_1 per esso risulta di lunghezza tre, quindi con Risoluzione III; mentre il disegno D_2 ha Risoluzione IV, e si rivela generalmente migliore di D_1 .

Analizziamo ora un'altra situazione, supponiamo di avere un disegno FFSP in cui $k_1 = 4$ e $k_2 = 3$, i possibili disegni alternativi sono:

$$D_1 = 2^{(4+3)-(1+1)}$$

$$D_2 = 2^{(4+3) - (0+2)}$$

con i seguenti *defining contrasts*:

$$D_1: I = ABCD = ABpqr = CDpqr$$

$$D_2: I = ABpq = ACDpr = BCDqr$$

In questo caso si nota immediatamente che, per entrambi i disegni, i generatori hanno la stessa lunghezza, e quindi, siamo portati a concludere che siano essenzialmente uguali; per individuare in cosa essi differiscano si consideri quale componente erratica viene utilizzata per verificare le interazioni del primo ordine. Nel disegno che abbiamo indicato con D_1 le interazioni del primo ordine che contengono almeno un *sub-factor* sono confuse con altre interazioni contenenti, anch'esse, almeno un *sub-factor*, e quindi, gli effetti principali dei *sub-factors* vengono, in questo disegno, verificati sul *sub-plot error*. Per l'altra possibile alternativa, D_2 , abbiamo che:

$$pq = AB, pr = ACD \text{ e } qr = BCD$$

e quindi la significatività degli effetti di pq , pr e qr è verificata utilizzando il *whole-plot error*.

Concludiamo quindi, che in D_1 tutte le interazioni del primo ordine sono valutate rispetto al *sub-plot error*, mentre in D_2 ciò è possibile soltanto per le tre interazioni suddette; da quanto appena detto si conclude che, in termini di precisione delle stime delle interazioni del primo ordine, D_1 è migliore di D_2 .

L'individuazione, quindi, di quale componente erratica viene utilizzata nel disegno per analizzare determinate interazioni, può diventare un aspetto di particolare importanza da considerare nella scelta tra più FFSP alternativi.

4.4 Il disegno *split-plot* nell'ambito della metodologia delle superfici di risposta

In questo paragrafo viene analizzato il disegno sperimentale *split-plot* come caso particolare di un determinato gruppo di disegni, i cosiddetti disegni bi-randomizzati (BRD); ad essi si fa spesso ricorso, sia per motivi economici che per motivi pratici, nella progettazione delle superfici di risposta (RSM), Myers e Montgomery (1997).

I disegni bi-randomizzati si suddividono in due classi: *crossed-BRD*, tra i quali rientra appunto lo *split-plot*, e *non-crossed-BRD*. Nei paragrafi successivi si descrive solamente la classe dei disegni bi-randomizzati *crossed*.

Per la trattazione degli argomenti presentati in questo paragrafo si fa riferimento a Myers e Montgomery (1997) e a Letsinger et al. (1996), ai quali si rimanda per maggiori approfondimenti.

4.4.1 I disegni sperimentali bi-randomizzati

La classe dei disegni bi-randomizzati, come già detto, si suddivide in due classi:

- i *crossed-BRD* (disegni bi-randomizzati incrociati)
- i *non-crossed-BRD* (disegni bi-randomizzati non incrociati)²⁷.

Considerando la classe dei disegni *crossed-BRD*, indichiamo con $(z_1, z_2, \dots, z_a)$ i *whole-factors*, e con $\mathbf{Z}$ la relativa matrice, con $(x_1, x_2, \dots, x_b)$ indichiamo i *sub-factors*, e con $\mathbf{X}$ alla matrice ad essi associata, mentre la i -esima osservazione registrata in corrispondenza dell' i -esimo *whole-factor* e dell' i -esimo *sub-factor* verrà indicata con (z_i, x_i) .

Il concetto generale di disegno *crossed* bi-randomizzato richiama molto quello del disegno *split-plot*, con l'unica differenza che in questo caso viene abbandonata l'assunzione, presente invece nello *split-plot*, che tutti i *sub-factors* devono comparire, in tutte le *whole-units* presenti nel disegno, con gli stessi livelli.

Questo tipo di generalizzazione si rende necessaria in questo contesto in quanto i disegni utilizzati nelle superfici di risposta presentano di per sé una struttura incrociata, come del resto avviene per ogni disegno in cui vengono messi a confronto più trattamenti.

4.4.2 I *crossed-bi-randomization design*

Il primo passo nella costruzione dei disegni bi-randomizzati “incrociati”, o *crossed*, consiste nell'assegnazione delle a combinazioni sperimentali, relative ai livelli dei *whole-factors* ($\mathbf{z}$); questi ultimi rappresentano quei fattori i cui livelli variano con difficoltà, di conseguenza, le relative combinazioni vengono associate alle unità sperimentali “più grandi”, o maggiori, del disegno, ovvero, alle *whole-units*. Successivamente, per ciascuna combinazione (z_i, x_i) le b combinazioni relative ai livelli dei fattori $\mathbf{x}$, i *sub-factors*, vengono assegnate in modo randomizzato alle unità minori, le *sub-units*, che compongono ciascuna *whole-unit*, precedentemente individuata. Un esempio tipico dei fattori $\mathbf{z}$ nell'ambito della RSM è proprio legata al concetto di fattore *noise* descritto nel secondo e terzo capitolo.

Nei disegni *crossed* rientrano, ad esempio, i fattoriali completi 2^k e 3^k ed i fattoriali *mixed-level*.

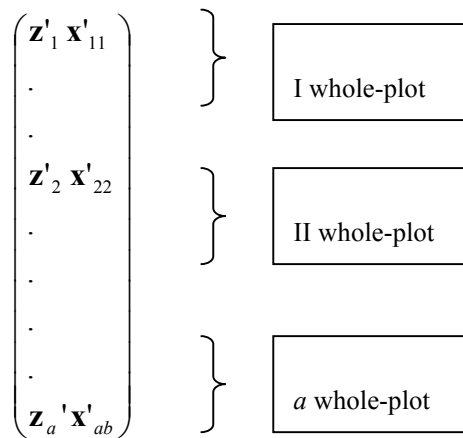
Il termine “*crossed*”, che caratterizza questa tipologia di disegni, viene utilizzato per il fatto che, in questo contesto, ogni combinazione $z_1, \dots, z_a$ viene “incrociata” con tutte le combinazioni relative a $\mathbf{X}$, come illustrato nel seguito (fig. 4.11):

²⁷ In questa classe di disegni vengono inclusi alcuni piani fattoriali frazionali del tipo 2^{k-p} , e la maggior parte dei disegni più frequentemente utilizzati nell'analisi delle superfici di risposta, come per esempio, il *Central Composite Design* o il *Box-Behnken design*.

Fig.: 4.11 Struttura matriciale di un disegno *crossed*-BRD

Z_1	X_1	X_2	...	X_b
Z_2	X_1	X_2	...	X_b
$\vdots$	$\vdots$	...	...	$\vdots$
Z_a	X_1	...	...	X_b

In particolare, la matrice del disegno diventa (fig. 4.12):

Fig.:4.12 Matrice di un disegno *crossed*-BRD

Si deve ribadire che ogni *whole-plot* contiene al suo interno le combinazioni relative ai *sub-plots*.

Il modello corrispondente, espresso nell'ambito della metodologia delle Superfici di Risposta, diventa:

$$y_{ij} = \beta_0 + \gamma' \mathbf{z}_i + \boldsymbol{\beta}' \mathbf{x}_{ij} + \mathbf{z}'_i \mathbf{B}_z \mathbf{z}_i + \mathbf{x}'_{ij} \mathbf{B}_x \mathbf{x}_{ij} + \mathbf{z}'_i \boldsymbol{\Delta} \mathbf{x}_{ij} + \delta_i + \varepsilon_{ij} \quad (4.10)$$

dove $i=1, \dots, a$; $j=1, \dots, b$; $\delta_i \sim \text{I.I.D. } N(0, \sigma^2_\delta)$; $\varepsilon_{ij} \sim \text{I.I.D. } N(0, \sigma^2)$ e $\text{cov}(\delta_{ij}, \varepsilon_i) = 0$ per ogni i e per ogni j .

Il numero dei parametri γ non deve superare il numero delle *whole-units* presenti nel disegno, $\boldsymbol{\Delta}$ rappresenta la matrice che contiene i parametri relativi alle interazioni tra *whole-factors* e *sub-factors* e quindi la matrice di particolare interesse nell'ambito della progettazione robusta del disegno.

Nel modello descritto, le ipotesi sulle varianze d'errore sono analoghe ad assumere che la covarianza tra due osservazioni appartenenti alla stessa *whole-unit* rimanga costante per tutte le sue osservazioni, ovvero, se y_{ij} è la j -esima osservazione appartenente alla i -esima *whole-unit*, si ha che:

$$\begin{aligned} \text{COV}(y_{ij}, y_{it}) &= \sigma_{\delta}^2 \quad \text{per ogni } i \\ &\text{e} \\ \text{COV}(y_{ij}, y_{kt}) &= 0 \quad \text{per } i \neq k \end{aligned}$$

Si sottolinea che l'assunzione di covarianza costante all'interno di ogni *whole-unit* viene mantenuta anche per i *non-crossed-BRD*.

L'esistenza di due componenti erratiche e di conseguenza di due componenti di varianza di errore non semplifica l'applicazione di uno *split-plot* nell'ambito della RSM. Il problema fondamentale è che nello *split-plot* "classico", o standard, le replicazioni sono il fondamento per la validità dei tests di ipotesi per gli effetti degli *whole-plots* e dei *sub-plots*; nella RSM, invece, il numero delle replicazioni viene spesso ridotto, o addirittura, non si effettuano replicazioni. Questo influisce notevolmente sia sulla stima delle componenti di varianza, σ_{δ}^2 e σ^2 , sia sulla stima dei parametri. Inoltre, la valutazione di un errore tramite l'accorpamento di effetti di interazione può risultare quantomeno uno svantaggio nell'ambito della RSM, laddove si desidera valutare un *Robust-Design*. Per illustrare quanto detto si noti che il modello statistico (4.10) può essere espresso nella seguente forma matriciale:

$$\mathbf{y} \sim N(\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}), \mathbf{V}) \quad (4.11)$$

dove $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta})$ rappresenta $E(\mathbf{y})$ in (4.10) e la matrice $\mathbf{V}$ è la matrice di varianza-covarianza per $\mathbf{y}$. Da quanto detto in precedenza, entro ogni *whole-plot* le osservazioni non sono indipendenti, ma hanno in comune σ_{δ}^2 . Al contrario, osservazioni appartenenti a due diversi *whole-plots* sono indipendenti. La struttura della matrice $\mathbf{V}$ è la seguente:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \mathbf{T}_a \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

dove $\mathbf{T}_i = \sigma^2 \mathbf{I}_{b \times b} + \sigma_{\delta}^2 \mathbf{1}_{b \times 1} \mathbf{1}_{1 \times b}$ e $\mathbf{V} = [ab \times ab]$.

Lo stimatore di $\boldsymbol{\beta}$, vettore $\mathbf{b}$, non è pertanto espresso tramite il metodo OLS, ma tramite il metodo di stima *Generalized Least Squares*, ovvero:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{y} \quad (4.13)$$

si noti che $\mathbf{X}$ è la matrice del modello espresso in (4.10) e (4.11); mentre in questo caso, come accade nella RSM per modelli del II ordine, $\mathbf{V} \neq \sigma^2 \mathbf{I}$. Questo comporta un problema nella stima della matrice $\mathbf{V}$, in quanto si devono conoscere i valori di σ_δ^2 e σ^2 . Due sono le considerazioni a questo riguardo: talvolta è possibile che anche nella RSM si possano utilizzare stimatori OLS; in generale, le stime di σ_δ^2 e σ^2 possono essere ottenute tramite analisi preliminare di *screening*.

Lucas e Ju (1992) hanno proposto l'idea di replicare ciascun livello dei *whole-factors* due volte, in modo da garantire la presenza dei gradi di libertà necessari alla stima della componente di *whole-plot error*; inoltre, ulteriori e recenti sviluppi in letteratura hanno contribuito notevolmente all'inserimento del disegno *split-plot* nell'ambito di questi disegni e nella RSM, si veda per dettagli Vining e Kowalski (2004).

Conclusioni

Il presente lavoro ha come scopo principale quello di introdurre in modo semplice ed operativo il disegno sperimentale *split-plot* come disegno valido e versatile per la progettazione robusta. A tal fine si è cercato di illustrare questo piano sperimentale in modo semplice, affiancando la teoria con esempi che potessero spiegare sia i fondamenti di base dello *split-plot*, che i suoi sviluppi congiuntamente al disegno fattoriale frazionale e alle superfici di risposta.

Progettare un disegno robusto non è facile e proprio in questa ottica lo *split-plot* può essere una valida alternativa non solo al *product-array* di Taguchi, che sappiamo essere non idoneo a questo scopo, ma anche a disegni sperimentali e modelli statistici più complessi, come, ad esempio, al *combined-array*.

I recenti sviluppi in letteratura del disegno *split-plot* avrebbero potuto condurre ad un lavoro molto più esteso, soprattutto sotto il profilo di rivalutazione metodologica; si deve però sottolineare lo scopo principalmente didattico del lavoro che ha indirizzato la nostra scelta espositiva agli aspetti più rilevanti a livello applicativo.

BIBLIOGRAFIA

- Barker T. B.**, 1994, "*Quality by experimental design*", (2nd edn), Marcel Dekker Inc., New York, U.S.A.
- Bartlett M.S.**, 1935, "*Discussion of complex experiments by F. Yates*", Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society II 2.
- Berni R.**, 1995, "*Metodi di Taguchi nel controllo di qualità off-line; Superfici di Risposta e Modelli Lineari Generalizzati*", Tesi di Dottorato, Università degli Studi di Firenze.
- Berni R.**, 1999, "*Disegno sperimentale e metodi di Taguchi nel Controllo di Qualità off-line*", Serie Didattica n.17, Dipartimento di Statistica "G. Parenti", Firenze.
- Bingham D. R. & Sitter R. R.**, 2001, "*Design issues in fractional factorial split-plot experiments*", Journal of Quality Technology, Vol. 33, No. 1.
- Bisgaard S.**, 2000, "*The design and analysis of $2^{k-p} \times 2^{q-r}$ split-plot experiments*", Journal of Quality Technology, Vol. 32, No. 1.
- Boari G.**, 1994, "*I metodi di Taguchi: esemplificazioni computazionali e software statistico*", Istituto di Statistica presso l'Università Cattolica del Sacro Cuore, Milano.
- Box G. E. P. & Hunter S. J.**, 1961, "*The 2^{k-p} fractional factorial design*", Technometrics Vol.3.
- Box G. E. P. & Hunter W. G. & Hunter S. J.**, 1978, "*Statistics for experimenters: an introduction to design, data analysis and model building*", John Wiley and Sons, New York, U.S.A.
- Box G. E. P. & Jones S.**, 1992, "*Split-plot designs for robust product experimentation*", Journal of Applied Statistics, Vol. 19, No. 1.
- Byrne D. M. & Taguchi S.**, 1987, "*The Taguchi Approach to Parameter Design*", *Quality Progress*.
- Cochran W. G. & Cox G. M.**, 1957, "*Experimental Designs*", (2nd edn), John Wiley & Sons, Inc., New York, U.S.A.
- Cortina J. M. & Mossein N.**, 2000, "*Effect size for ANOVA designs*", Sage Publications, Inc., U.S.A.
- Cox D. R. & Reid N.**, 2000, "*The Theory of the Design of Experiment*", Chapman e Hall/CRC, New York, U.S.A.
- Daniel C.**, 1976, "*Application of statistics to industrial experimentation*", John Wiley & Sons, New York, U.S.A.
- Der G. & Everitt B. S.**, 2002, "*A handbook of statistical analysis using SAS*", (2nd edn), Chapman e Hall/CRC, Boca Raton.
- Gardiner W. P. & Gettinby G.**, 1998, "*Experimental Design Techniques in Statistical Practice: a practical software-based approach*", (1st edn), Horwood Publishing Limited, UK.

- Huang P. & Chen D. & Voelkel J.**, 1998, “*Minimum Aberration Two-Level Split-Plot Designs*”, Technometrics 40.
- Jackson S. & Brashers D. E.**, 1994, “*Random Factors in ANOVA*”, Sage Publications, Inc., U.S.A.
- Jobson J. D.**, 1991, “*Applied Multivariate Data Analysis, Volume I: Regression and Experimental Design*”, Springer-Verlag, New York, U.S.A.
- Kackar R.N.**, 1985, “*Off-Line quality control, Parameter Design and the Taguchi method*”, Journal of Quality Technology, vol. 17, No. 4.
- Letsinger J. D.**, 1996, “*Response surface methods for bi-randomization structures*”, Journal of Quality Technology, Vol. 28, No. 4.
- Levin I. P.**, 1999, “*Relating Statistics and Experimental Design: An Introduction*”, Sage Publications, Inc., U.S.A.
- Lindman H. R.**, 1992, “*Analysis of variance in experimental design*”, Springer – Verlag, New York, U.S.A.
- Logothetis N. & Wynn H. P.**, 1989, “*Quality Through Design, experimental design, off-line quality control and Taguchi’s contributions*”, Clarendon Press, Oxford, UK.
- Lucas J. M.**, 1994, “*How to Achieve a Robust Process Using Response Surface Methodology*”, Journal of Quality Technology, Vol. 26, No. 4.
- Michaels S.E.**, 1964, “*The usefulness of experimental design*” (with discussion), Journal of the Royal Statistical Society C, Vol.13.
- Miller A. & Sitter R. R. & Wu C. F. J. & Long D.**, 1993, “*Are Large Taguchi – Style Experiments necessary? A reanalysis of Gear and Pinion Data*”, Quality Engineering, Vol.6.
- Myers R.H. & Khuri A.I. & Vining G.**, 1992, “*Response Surface alternatives to the Taguchi robust parameter design approach*”, The American Statistician, Vol. 46.
- Myers R. H., Montgomery D. C.**, 2002, “*Response surface methodology: process and product optimization using designed experiments*”, (2nd edn), John Wiley e sons, New York, U.S.A.
- Montgomery D. C. & Coleman D. E.**, 1993, “*A Systematic Approach to Planning for a Designed Industrial Experiment*”, Technometrics, Vol. 35.
- Montgomery D. C.**, 2001, “*Design and analisys of experiments*”, (5th edn), Wiley, New York, U.S.A.
- Nair V.N. (ed.)**, 1992, “*Taguchi’s Parametr Design: a panel discussion*”, Technometrics, vol. 34, No 2.
- Pallottini A.**, 2004, “*Robustezza del disegno sperimentale nel controllo di qualità: lo split-plot come miglioramento al product-array di Taguchi*”, Tesi di Laurea in Statistica, Università degli Studi di Firenze.

Pinheiro J. C. & Bates D. M., 2000, “*Mixed-Effects Model in S and S-PLUS*”, Springer-Verlag, New York, U.S.A.

Robinson T. J., Myers R. H., Montgomery D. C., 2004, “*Analysis considerations in industrial split-plot experiments with non-normal responses*”, Journal of Quality Technology, Vol. 36, No. 2.

Salvi F., 2002, “*Argomenti di metodologia statistica per la ricerca biologica*”, Pitagora Editrice, Bologna.

Salvi F., Chiandotto B. (A cura di), 1978, “*Biometria, principi e metodi*”, Piccin Editore, Padova.

Shoemaker A. C., Tsui K., Wu J. C. F., 1991, “*Economical Experimentation Methods for Robust Design*”, Technometrics, Vol. 33, No. 4.

Toutenburg H. (con il contributo di **Thomas Bitter**), 2002, “*Statistical analysis of designed experiments*”, (2nd edn), Springer-Verlag, New York, U.S.A.

Vining G., Kowalski S., 2004, “*An Overview of Composite Designs Run as Split-Plot*”, Minitab Inc.

<http://cc.uoregon.edu/cnews/summer2001/procmixed.html>

<http://home.nc.rr.com/schbenb/Split-Plot.html>

<http://www.stat.vt.edu/~oliver/stat 5616/LectureNotes.html>

<http://bill.psyc.anderson.edu/exdes/ex7.htm>

<http://www.id.unizh.ch/software/unix/statmath/sas/sasdoc/stat/chap41>

Copyright © 2006

Rossella Berni, Arianna Pallottini